جمهورية مصر العربية
وزارة التجارة والصناعة
مصلحة الكفاية الأنتاجية والتدريب المهنى
الإدارة العامة للبرامج والمواصفات

الميكانيكا

الصف الثانى نظام التلمذة الصناعية
جميع مراكز التدريب

إعداد

أ- أحمد محمد أحمد
مدرس بمركز معادن فيكتوريا – شرق الأسكندرية
ماجستير فى الرياضيات

أ- السيدة حسن موسى
مدرسة بمركز الآلات الد قيقة- شرق الأسكندرية

مراجعة

د – عماد عبد العزيز عشماوى
قسم الرياضيات – كلية العلوم
جامعة الأسكندرية

طبعة ٢٠١٦-٢٠١٧م

المحتويات

أولاً: الأستاتيكا

المحتويات

ثانياً : الديناميكا

الوحدة الأولى

القصور الذاتى

الوحدة الثانية

قوانيين نيوتن للحركة

المحتويات

المحتويات

الوحدة الرابعة

الطاقة

جميع إثباتات وبراهين القوانيين تعتبر مرجع للطالب

الأستاتيكا

<u>الوحدة الأولى</u>
العزم

عدد الحصص الدراسية ٨

<u>الوحدة الثانية</u>
مركز الثقل

عدد الحصص الدراسية ١٠

الوحدة الأولى

العــزم

مقدمة :

عند دراسة علم الميكانيكا نجد أنه من المُلح التعامل مع تأثير القوة حول محور دوران وما ينتج عنه من عزم . فالعامل الذى يستخدم مفتاح ربط يؤثر بقوة تعمل على دوران حول محور والسائق الذى يستخدم مقود السيارة يؤثر بقوة تعمل على دوران حول محور .

ولا تخلو التطبيقات الرياضية مهما أتسع شأنها من هذا المفهوم البسيط .

١-العزم (Moment)

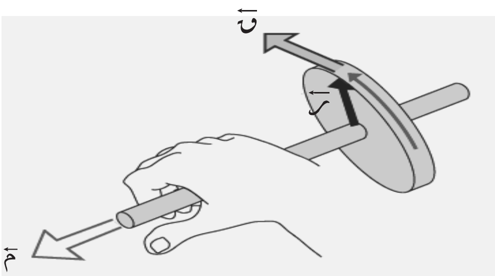
١-١ تعريف عزم القوة

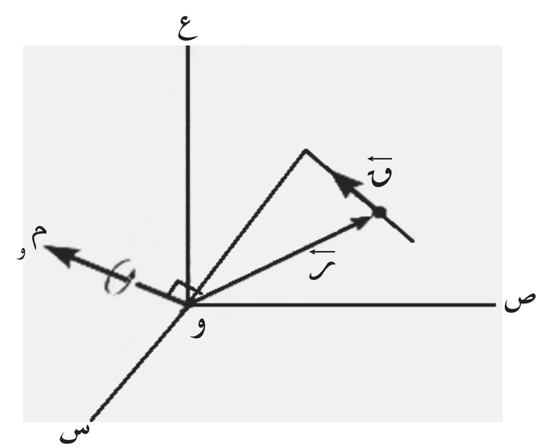
عزم القوة هو دوران الجسم تحت تأثير القوة حول محور الدوران.

١-٢ طرق حساب العزم

(١) عزم قوة هو كمية متجهه تمثل حاصل الضرب الإتجاهى لمتجه ذراع العزم "$\overleftarrow{ر}$" ومتجه القوة "$\overleftarrow{ق}$" المسبب للعزم ويمثل متجه ذراع العزم المتجه الواصل بين نقطة على محور الدوران وأى نقطة على خط عمل القوة . ويأخذ متجه العزم الأتجاه العمودى على المستوى الذى يحوى المتجهين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ وهو فى اتجاه أبهام اليد اليمنى عندما تشير الأصابع المنحنية إلى دوران المتجه $\overleftarrow{ر}$ نحو المتجه $\overleftarrow{ق}$ وهو يقع فى أتجاه محور الدوران.

عزم القوة حول نقطة "و" $\overleftarrow{م}_{و} = \overleftarrow{ر} \times \overleftarrow{ق}$





ويمكن كتابة حاصل الضرب الأتجاهى على الصورة

$$\overleftarrow{م}_{و} = (ق\ ر\ جاهـ)\overleftarrow{ي}$$

حيث ر ، ق هما معيار متجه ذراع العزم ومتجه القوة على الترتيب ، والزاوية " هـ " هى الزاوية المحصورة بين المتجه "$\overleftarrow{ق}$" والمتجه "$\overleftarrow{ر}$" ، والمتجه $\overleftarrow{ي}$ هو متجه وحدة عمودى على المستوى الذى يحوى المتجهين $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ر}$ وهو فى اتجاه أبهام اليد اليمنى عندما تشير الأصابع المنحنية إلى دوران المتجه $\overleftarrow{ر}$ نحو المتجه $\overleftarrow{ق}$.

بأخذ معيار الطرفين للمعادلة السابقة ينتج معيار العزم حول نقطة "و"

$$م_{و} = ق\ ر\ جاهـ$$

(٢) إذا كان طول العمود الساقط من نقطة "و" على خط عمل القوة هو" ف " فإنه من هندسة الشكل التالى $ف = ر\ جاهـ$

وعلى ذلك ينتج أن

$$\overleftarrow{م}_{و} = (ق\ ف)\overleftarrow{ي}$$

بأخذ معيار الطرفين ينتج معيار العزم حول نقطة "و"

$$م_و = ن ف$$

أى أن عزم القوة حول نقطه هو حاصل ضرب مقدار القوة فى طول البعد العمودى الساقط من محور الدوران على خط عمل القوة .

١-٣ خواص العزم

١-٣-١ وحدة قياس عزم القوة

وحدة قوة × وحدة طول

نيوتن. متر ، داين.سم ، ث كجم.متر ، ث جم . سم

١-٣-٢ معادلة أبعاد عزم القوة

معادلة الأبعاد $= [ن ف] = [ن][ف] = (كل ت^{-٢}) \times (ل)$

معادلة أبعاد العزم $=$ كل^{٢} ت$^{-٢}$

١-٣-٣ العوامل التى يتوقف عليها العزم

يتوقف العزم على عاملين

١- القوة

٢- طول ذراع العزم : وهو البعد العمودى بين القوة ومحور الدوران

ومما سبق نستنتج أن العزم يزيد كلما

١- زادت القوة

٢- بعدت المسافة بين محور الدوران ونقطة تأثير القوة

٣- حين تؤثر القوة باتجاه عمودى على الخط الواصل بين نقطة تأثيرها ومحور الدوران (هـ = ٩٠°)

٤- في حالة الاتزان فأن مجموع العزوم حول محور الدوران يساوي صفر .

<u>١-٣-٤ إشارة العزم</u>

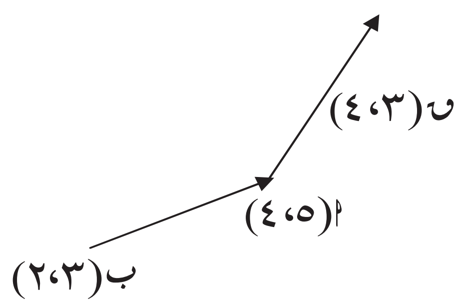
١- إشارة موجبة : القوة تؤثر عكس اتجاه عقارب الساعة

٢- إشارة سالبه : القوة تؤثر باتجاه عقارب الساعة

مثال (1)

القوة ق = ٣س + ٤ص تؤثر عند النقطة أ(٥،٤) أوجد عزم القوة ق بالنسبة للنقطة ب(٢،٣)

الحــل



مب = بأ × ق

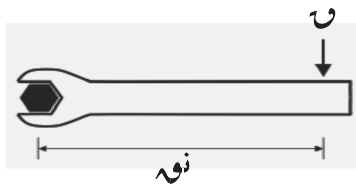
بأ = وأ − وب = (٥،٤) − (٢،٣) = (٣،١)

مب = (٣س + ص) × (٣س + ٤ص) = (٣ × ٤ − ١ × ٣) ع = ٩ع

ويأخذ العزم الاتجاه ع وهو عمودى على مستوى المتجهين س و ص ويقع على محور الدوران.

مثال (2)

عامل يقوم بربط مسمار بواسطة مفتاح ، فإذا كانت يد العامل تبعد مسافه ٠,٣ متر عن محور دوران المسمار وتؤثر يده بقوه عموديه على المفتاح قيمتها ١٢٥ نيوتن ، احسب العزم



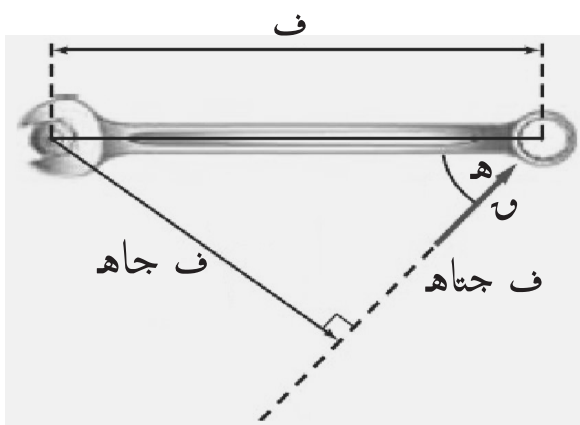
الحــل

العزم = ق ف = ١٢٥ × ٠,٣ = ٣٧,٥ نيوتن.متر

مثال (3)

عامل يقوم بفك مسمار بواسطة مفتاح ، فإذا كانت يد العامل تبعد مسافه ٠,٤ متر عن محور المسمار وتؤثر يده بقوه تميل على المفتاح بزاوية ٣٠ على المفتاح قيمتها ١٠٠ نيوتن ، احسب العزم

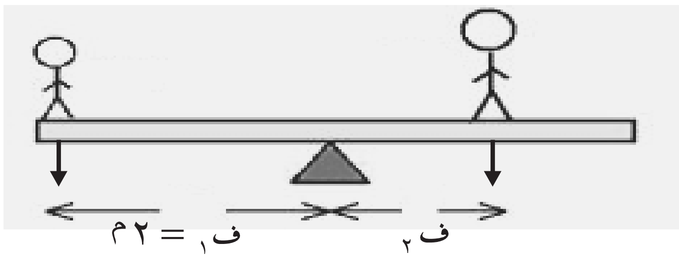
الحــل



العزم = ق ف جاهـ = ١٠٠ × ٠,٤ × جا٣٠ = ٢٠ نيوتن.متر

مثال (4)

طفلان وزنهما ٢٥ ث كجم ، ٣٥ ث كجم يتأرجحان على أرجوحه ترتكز على دعامه بين الطفلين كما هو موضح بالشكل ، فإذا جلس الطفل الأول على بعد ٢متر من الدعامه ، فأوجد بعد الطفل الثانى حتى تتزن الأرجوحه.



الحـل

عزم الوزن الأول = ں$_{١}$ ف$_{١}$ = ٢٥×٢=٥٠ ث كجم.متر

عزم الوزن الثانى = ں$_{٢}$ ف$_{٢}$ = −٣٥×ف= −٣٥ف ث كجم.متر

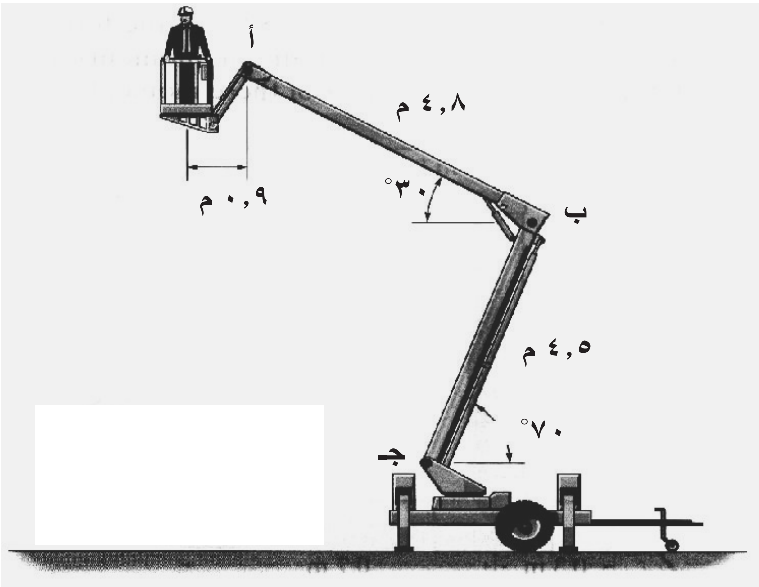
فى حالة الأتزان فإن مجموع العزوم حول محور الدوران يساوى صفر

٥٠ − ٣٥ف = ٠

ف = $\frac{٥٠}{٣٥}$ = ١,٤ متر

مثال (5)

رافعه ذات ذراع تطويل مقسم إلى ثلاث أجزاء بين كل جزء وآخر مفصل أملس مثبته برصيف ترفع رجل داخل صندوق معدنى وزنهما ٢٥٠٠ نيوتن احسب عزم قوة الوزن حول نقطة أ ، ب



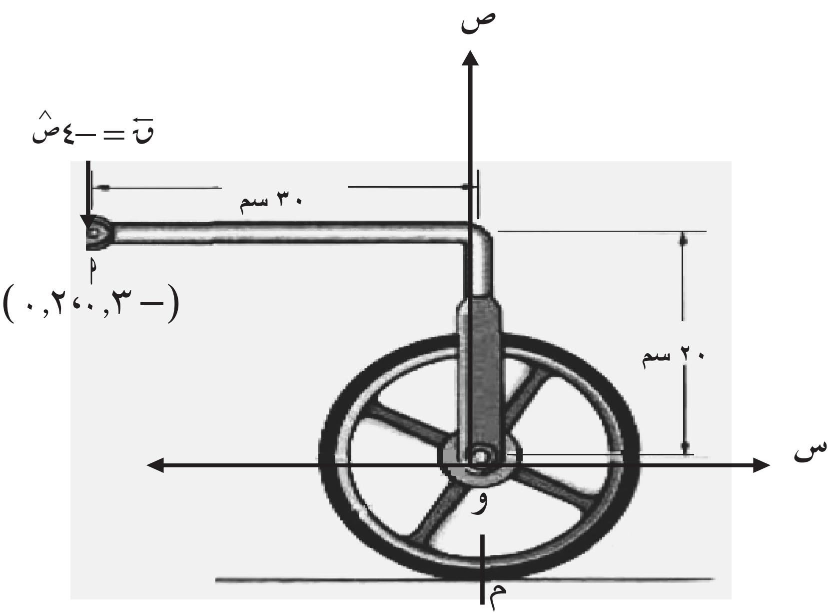
الحــل

العزم حول نقطة "أ" = ٢٥٠٠ × ٠,٩ = ٢٢٥٠ نيوتن . م

العزم حول نقطة "ب" = ٢٥٠٠ × (٠,٩ + ٤,٨ جتا ٣٠) = ١٢٦٤٢,٣ نيوتن . م

مثال (6)

فى الشكل المقابل ، عجله مثبته لا تتحرك عند نقطة "م" مركب بها ذراع قابل للدوران رأسياً حول نقطة "و" تحت تأثير القوة الرأسيه $\overrightarrow{ق} = -٤\hat{ص}$ كما هو موضح بالرسم ، أوجد عزم القوة (ق) حول نقطة "و" بالصورة المتجهه والصورة القياسية حيث أن وحدة القوة بالنيوتن.



الحـل

(أ) لإيجاد العزم الناتج من القوه عند نقطة "و" نحسب أولاً المتجه $\overrightarrow{ر}_{وم}$

$$\overrightarrow{ر}_{وم} = \overrightarrow{ر}_{م} - \overrightarrow{ر}_{و}$$

$$\overrightarrow{ر}_{وم} = \left(-٠,٣\hat{س} + ٠,٢\hat{ص}\right) - \left(٠\hat{س} + ٠\hat{ص}\right)$$

$$\overrightarrow{ر}_{وم} = -٠,٣\hat{س} + ٠,٢\hat{ص}$$

$$\therefore \overrightarrow{م}_{و} = \overrightarrow{ر}_{وم} \times \overrightarrow{ق}_{م} = (-٠,٣\hat{س} + ٠,٢\hat{ص}) \times (٠\hat{س} - ٤\hat{ص})$$

$$\overrightarrow{م}_{و} = (-٠,٣ \times -٤ - ٠,٢ \times ٠)\hat{ع}$$

$\overleftarrow{م}_{و} = ١,٢\ \hat{ع}$ نيوتن.متر

أى أن معيار العزم ١,٢ نيوتن.متر وفى الأتجاه العمودى على متجهى الموضع والفوة وهو عزم موجب لأن الدوران عكس عقارب الساعة

(ب) نقوم بحساب قيمة القوة

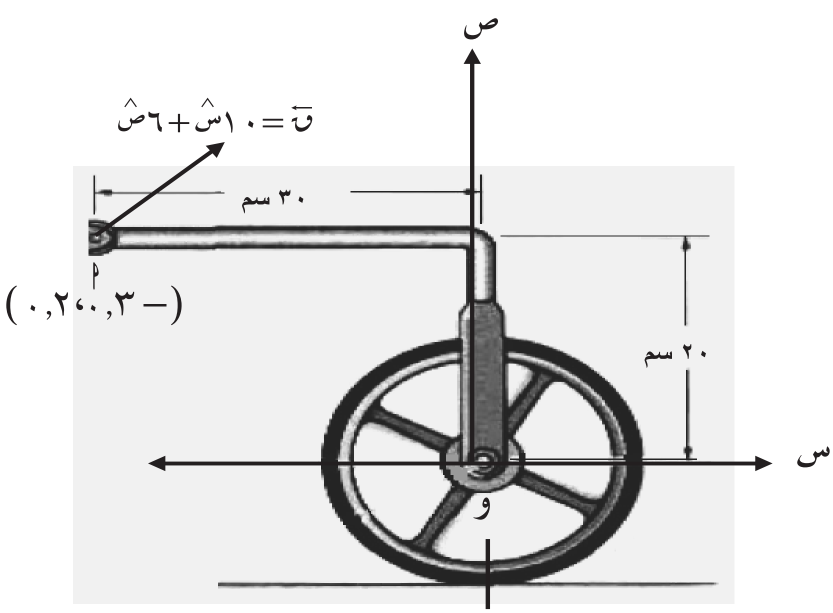
$$\left|\overleftarrow{ق}\right| = \left|-٤\hat{ص}\right| = \sqrt{(٠)^{٢} + (-٤)^{٢}} = ٤$$

مقدار العزم= القوة×طول ذراع العزم = $٤ \times ٠,٣ = ١,٢$

واتجاه العزم عكس عقارب الساعه لذا سيكون موجباً

مثال (7)

فى الشكل المقابل ، عجله مثبته لا تتحرك عند نقطة "م" مركب بها ذراع قابل للدوران رأسياً حول نقطة "و" تحت تأثير القوة المائله على الأفقى $\overleftarrow{ق} = ١٠\hat{س} + ٦\hat{ص}$ كما هو موضح بالرسم، أوجد عزم القوة (ق) حول نقطة "و" بالصورة المتجهه أوالصورة القياسية حيث أن وحدة القوة بالنيوتن



الحـل

(أ) لإيجاد العزم الناتج من القوه عند نقطة "و" نحسب أولاً المتجه $\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{وم}}$

$$\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{وم}} = \overleftarrow{\text{ر}}_{\text{م}} - \overleftarrow{\text{ر}}_{\text{و}}$$

$$\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{وم}} = \left(-\text{٠,٣}\,\hat{\text{س}} + \text{٠,٢}\,\hat{\text{ص}}\right) - \left(\text{٠}\,\hat{\text{س}} + \text{٠}\,\hat{\text{ص}}\right)$$

$$\overleftarrow{\text{ر}}_{\text{وم}} = -\text{٠,٣}\,\hat{\text{س}} + \text{٠,٢}\,\hat{\text{ص}}$$

$$\therefore \overleftarrow{\text{م}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}}_{\text{بم}} \times \overleftarrow{\text{ق}}_{\text{م}} = \left(-\text{٠,٣}\,\hat{\text{س}} + \text{٠,٢}\,\hat{\text{ص}}\right) \times \left(\text{١٠}\,\hat{\text{س}} + \text{٦}\,\hat{\text{ص}}\right)$$

$$\overleftarrow{\text{م}}_{\text{و}} = \left(-\text{٠,٣} \times \text{٦} - \text{٠,٢} \times \text{١٠}\right)\hat{\text{ع}}$$

$$\overleftarrow{\text{م}}_{\text{و}} = -\text{٣,٨}\,\hat{\text{ع}} \ \text{نيوتن.متر}$$

أى أن معيار العزم ٣,٨ نيوتن.متر وفى الأتجاه العمودى على متجهى الموضع والقوة وهو عزم سالب لأن الدوران مع عقارب الساعة

<u>ملاحظه</u>

ومن هذا المثال يتضح أن طريقة المتجهات فاعله فى حالة عدم معرفة ذراع العزم أو صعوبة إيجاده .

الازدواج (Couple)

٤-١ تعرف الازدواج

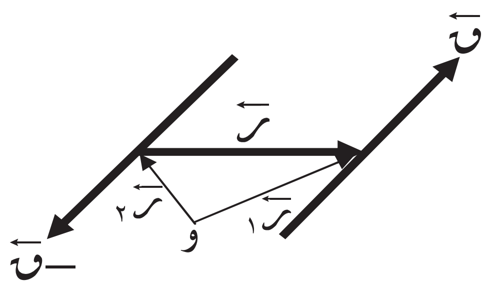
قوتان متساويتان في المقدار ومتضادتان في الاتجاه ولا يجمعهما خط عمل واحد.

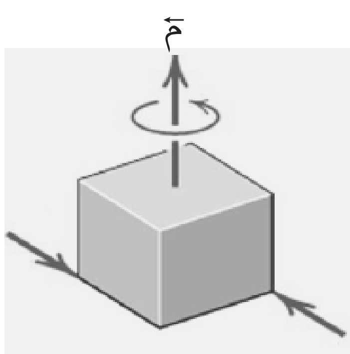
ومن أمثلة الازدواج القوتان اللتان نؤثر بهما عند ربط أو فك مسمار بمفتاح عجل.

٥-١ عزم الدوران للازدواج

هو العزم الناتج عن مجموع عزمى قوتى الأزدواج.

(١) فى حالة عدم معرفة طول البعد العمودى بين القوتين نحسب متجه بين نقطتين على خط تأثيرهما





عزم كل من القوتين حول نقطة "و"

$$\overleftarrow{\text{م}}_{1} = \overleftarrow{\text{ر}}_{1} \times \overleftarrow{\text{ق}} \quad ، \quad \overleftarrow{\text{م}}_{2} = \overleftarrow{\text{ر}}_{2} \times -\overleftarrow{\text{ق}}$$

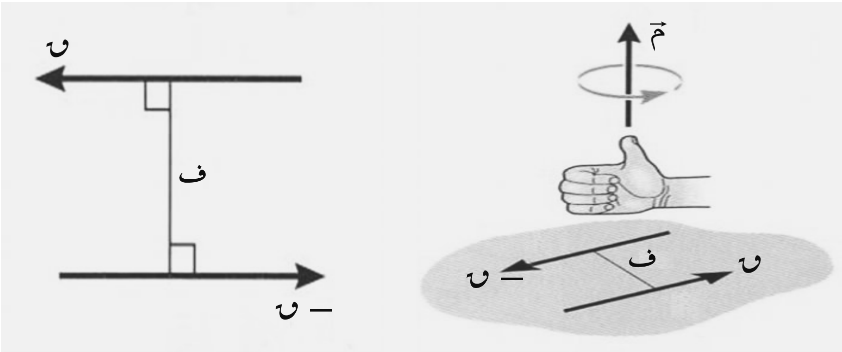
مجموع العزوم حول نقطة "و"

$$\overleftarrow{\text{م}}_{\text{و}} = \left(\overleftarrow{\text{ر}}_{1} \times \overleftarrow{\text{ق}}\right) + \left(\overleftarrow{\text{ر}}_{2} \times -\overleftarrow{\text{ق}}\right)$$

$$\overleftarrow{\text{م}}_{\text{و}} = \left(\overleftarrow{\text{ر}}_{1} - \overleftarrow{\text{ر}}_{2}\right) \times \overleftarrow{\text{ق}}$$

عزم الازدواج $\overleftarrow{\text{م}}_{\text{و}} = \overleftarrow{\text{ر}} \times \overleftarrow{\text{ق}}$

(٢) فى حالة معرفة طول البعد العمودى "ف" بين القوتين فإن

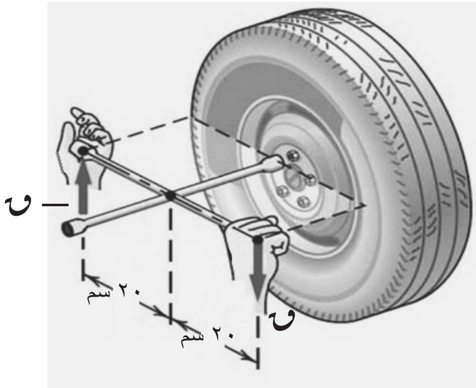


معيار عزم الإزدواج = ق × ف

وعلى هذا نستنتج أن معيار عزم الدوران للأزدواج يساوى حاصل ضرب قيمة أحدى القوتين فى البعد العمودى بين القوتين.

مثال (8)

يقوم شخص بربط صامولة عجلة سياره بستخدام مفتاح ربط مؤثراً بأزدواج قيمة كل من قوتيه ١٥٠ نيوتن وطول ذراع الربط ٤٠ سم كما بالرسم، احسب عزم الأزدواج.

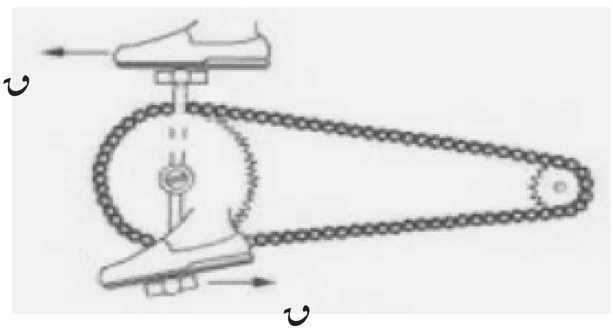


الحـل

معيار عزم الإزدواج = ق × ف = ١٥٠ × ٠,٤ = ٦٠ نيوتن.متر

مثال (9)

يقود شخص دراجه فتؤثر قدماه على بدال الدراجه بقوتان تنتجان إزدواج يعمل على دوران البدال كما بالرسم ، فإذا كان مقدار كل من القوتين ١٠٠ نيوتن والمسافه العموديه بين البداليين ٣٠ سم. أوجد عزم الأزدواج

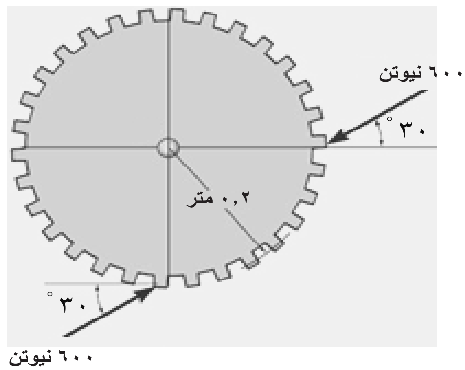


الحل

معيارعزم الإزدواج = ق × ف = ١٠٠ × ٠,٣ = ٣٠ نيوتن.متر

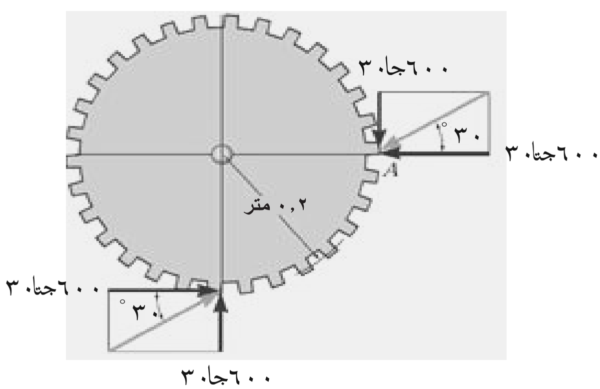
مثال (10)

ترس نصف قطره ٠,٢ متر تؤثر عليه قوتين تعملان على دورانه قيمة كل منهما ٦٠٠ نيوتن وتميل كل منهما على الأفقى بزاويه ٣٠° فتكون أزدواج كما هو موضح بالشكل ، أوجد عزم الأزدواج المؤثر على الترس.



الحــل

نحلل القوى فى الإتجاهيين الرأسى والأفقى



- القوتان الأفقيتان التى قيمة كل منهما ٦٠٠ جتا ٣٠ تمثلان إزدواج عزمه

معيارعزم الإزدواج= ٦٠٠جتا٣٠ × ٠,٢= ١٠٣,٩ نيوتن.متر

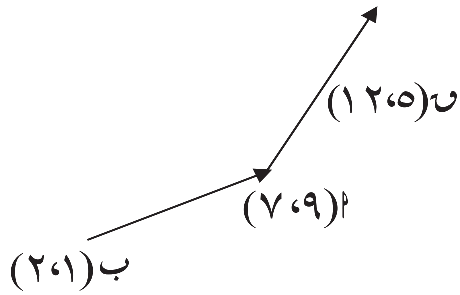
- القوتان الرأسيتان التى قيمة كل منهما ٦٠٠ جا ٣٠ تمثلان إزدواج عزمه

معيارعزم الإزدواج= –٦٠٠جا٣٠ × ٠,٢= –٦٠ نيوتن.متر

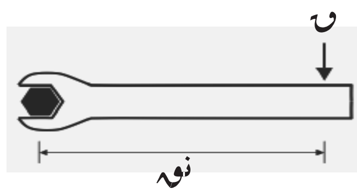
عزم الأزدواج المحصل= ١٠٣,٩ – ٦٠ = ٤٣,٩ نيوتن.متر

<u>**تمارين (١)**</u>

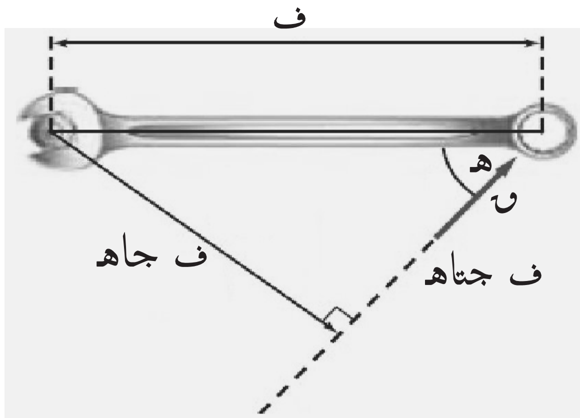
(١) القوة ق = ٥ س + ١٢ ص تؤثر عند النقطة أ(٩،٧) أوجد عزم القوة ق بالنسبة للنقطة ب(١،٢)



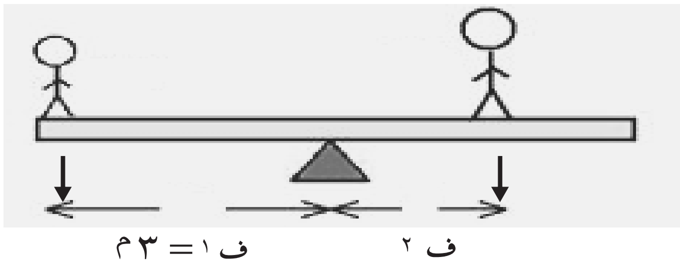
(٢) عامل يقوم بربط مسمار بواسطة مفتاح ، فإذا كانت يد العامل تبعد مسافه ٠,٤ متر عن محور دوران المسمار وتؤثر يده بقوه عموديه على المفتاح قيمتها ١٥٠ نيوتن ، احسب العزم



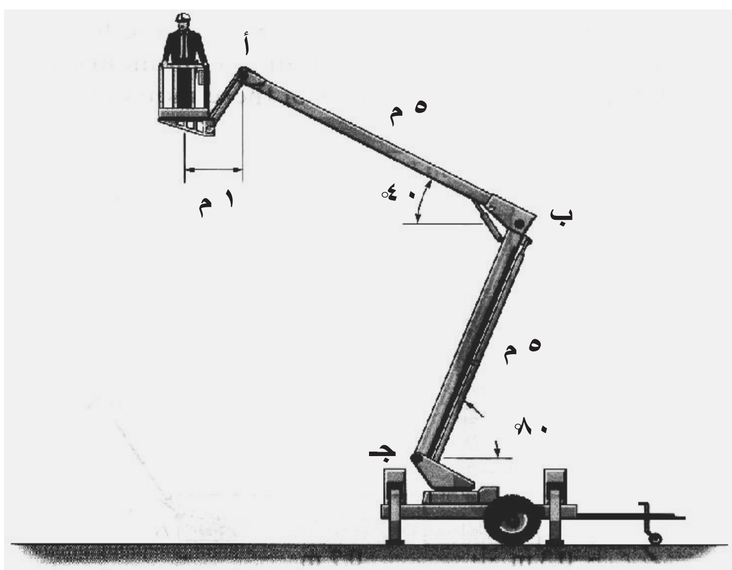
(٣) عامل يقوم بفك مسمار بواسطة مفتاح ، فإذا كانت يد العامل تبعد مسافه ٠,٣ متر عن محور المسمار وتؤثر يده بقوه تميل على المفتاح بزاوية ٦٠ على المفتاح قيمتها ٧٠ نيوتن ، احسب العزم



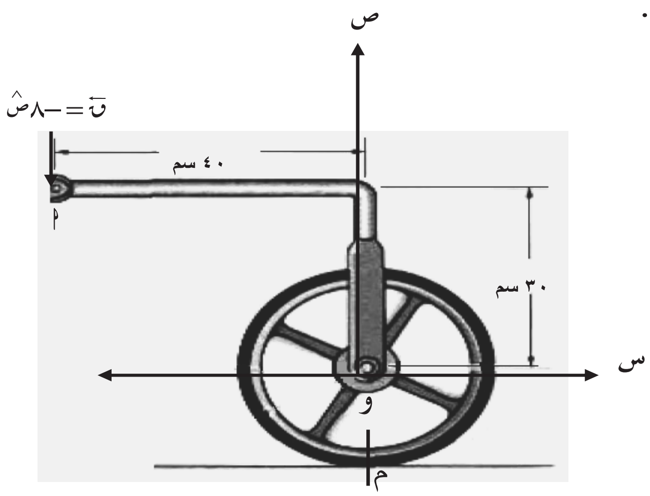
(٤) طفلان وزنهما ٤٠ ث كجم ، ٢٨ ث كجم يتأرجحان على أرجوحه ترتكز على دعامه بين الطفلين ، فإذا جلس الطفل الأول على بعد ٣ متر من الدعامه ، فأوجد بعد الطفل الثانى حتى تتزن الأرجوحه.



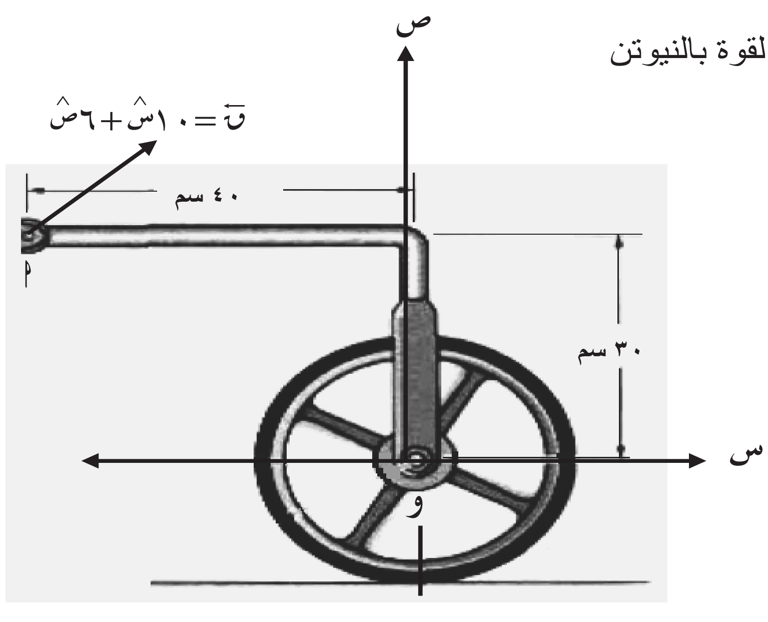
(٥) رافعه ذات ذراع تطويل مقسم إلى ثلاث أجزاء بين كل جزء وآخر مفصل أملس مثبته برصيف كما هو موضح بالرسم فإذا رفعت رجل داخل صندوق معدنى وزنهما ٢٥٠٠ نيوتن احسب عزم قوة الوزن حول نقطة أ ، ب



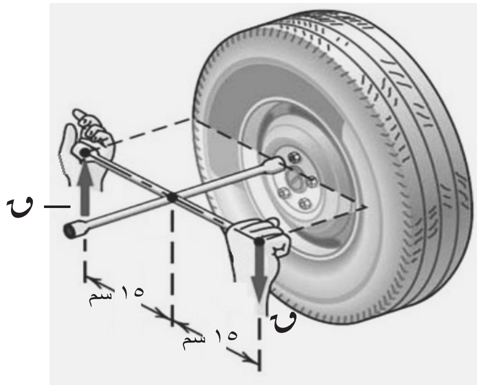
(٦) فى الشكل المقابل ، عجلـه مثبتـه لا تتحـرك عند نقطـة "م" مركـب بهـا ذراع قابـل للدوران رأسياً حول نقطـة "و" تحت تـأثير القـوة الرأسيه $\overleftarrow{ق} = -٨\hat{ص}$ كما هو موضح بالرسم ، أوجد عزم القوة (ق) حول نقطـة "و" بالصورة المتجهه والصورة القياسية حيث أن وحدة القوة بالنيوتن.



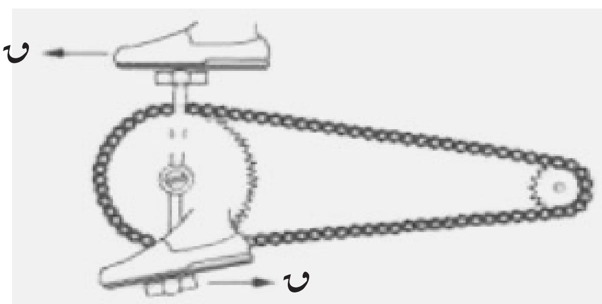
(٧) فى الشكل المقابل ، عجلـه مثبتـه لا تتحـرك عند نقطـة "م" مركـب بهـا ذراع قابـل للدوران رأسياً حول نقطـة "و" تحت تـأثير القـوة المائلـه علـى الأفقى $\overleftarrow{ق} = ٥\hat{س} + ١٢\hat{ص}$ كما هو موضح بالرسم، أوجد عزم القوة (ق) حول نقطـة "و" بالصورة المتجهه أوالصورة القياسية حيث أن وحدة القوة بالنيوتن



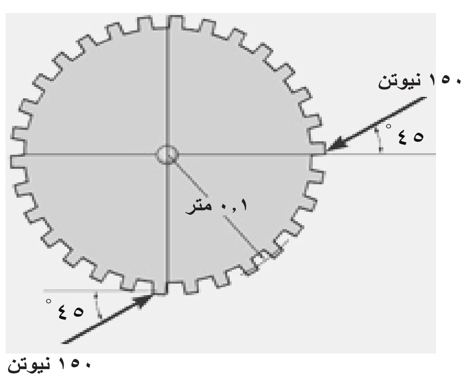
(٨) يقوم شخص بربط صامولة عجلة سياره بستخدام مفتاح ربط مؤثراً بأزدواج قيمة كل من قوتيه ٢٠٠ نيوتن وطول ذراع الربط ٣٠ سم كما بالرسم، احسب عزم الأزدواج.



(٩) يقود شخص دراجه فتؤثر قدماه على بدال الدراجه بقوتان تنتجان إزدواج يعمل على دوران البدال كما بالرسم ، فإذا كان مقدار كل من القوتين ٧٠ نيوتن والمسافه العموديه بين البدالين ٤٠سم. أوجد عزم الأزدواج.



(١٠) ترس نصف قطرة ٠,١ متر تؤثر عليه قوتين قيمة كل منهما ١٥٠ نيوتن وتميل كل منهما على الأفقى بزاويه ٤٥° فتكون أزدواج كما بالشكل ، أوجد عزم الأزدواج المؤثر على الترس.



الوحدة الثانية

مركز الثقل

٢-١ تعريف مركز الثقل

٢-٢ حساب مركز الثقل

٢-٣ مركز ثقل بعض الأشكال المشهورة

٢-٤ حساب مركز الثقل للأشكال و الأجسام المركبة

مقدمة

عندما نتعامل مع قوة وزن الجسم ومدى تأثيرها ميكانيكياً على النظام الميكانيكى المحيط بها نحتاج للنقطة التى تؤثر عندها قوة الوزن ، لأن القوة تتعين بمقدار وأتجاه ونقطة تأثير . ونقطة التأثير هنا تسمى بمركز ثقل الجسم ، وسنتناول فى هذه الوحدة كيفية حساب مركز الثقل لبعض الأجسام .

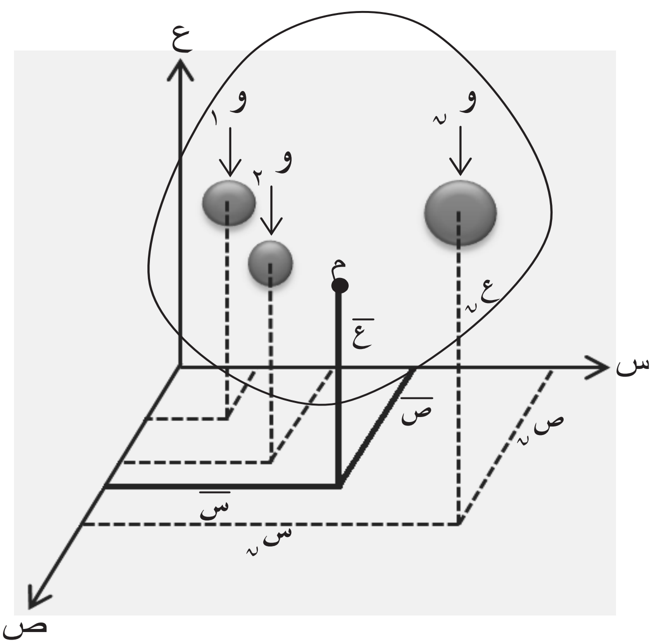
٢- مركز الثقل (Center of Gravity)

٢-١ تعريف مركز الثقل

نقطه تقع داخل الجسم أو خارجه يمر بها خط عمل وزن الجسم ويكون عزم قوة الوزن عند هذه النقطة مساوياً الصفر.

٢-٢ حساب مركز الثقل

جسم وزنه و يتكون من مجموعة من الجسيمات عددها "ن" وأوزانها $و_{١}$ ، $و_{٢}$ ، $و_{٣}$ ، . . . . . ، $و_{ن}$



إحداثيات مركز ثقل الجسم عند نقطة "م" بالنسبة لمحاور الإحداثيات هى $\overline{س}$ ، $\overline{ص}$ ، $\overline{ع}$

الإحداثيات السينية لمركز ثقل الجسيمات $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ ، . . . . . ، $س_{ن}$

الإحداثيات الصاديه لمركز ثقل الجسيمات $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، $ص_{٣}$ ، . . . . . ، $ص_{ن}$

الإحداثيات العينية لمركز ثقل الجسيمات $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، $ع_{٣}$ ، . . . . . ، $ع_{ن}$

عزم قوة وزن الجسم حول كل محور من محاور الإحداثيات يساوى مجموع عزوم قوى وزن الجسيمات حول كل محور من محاور الإحداثيات على الترتيب

بأخذ العزوم حول المحور الصادى

$$و \overline{س} = و_١ س_١ + و_٢ س_٢ + و_٣ س_٣ + \cdots\cdots + و_ن س_ن$$

$$\overline{س} = \frac{و_١ س_١ + و_٢ س_٢ + و_٣ س_٣ + \cdots\cdots + و_ن س_ن}{و}$$

$$\overline{س} = \frac{ج\left(و\, \tilde{س}\right)}{ج\,(و)}$$

وبالمثل بأخذ العزوم حول المحور السينى والعينى ينتج أن

$$\overline{ص} = \frac{و_١ ص_١ + و_٢ ص_٢ + و_٣ ص_٣ + \cdots\cdots + و_ن ص_ن}{و}$$

$$\overline{ص} = \frac{ج\left(و\, \tilde{ص}\right)}{ج\,(و)}$$

$$\overline{ع} = \frac{و_١ ع_١ + و_٢ ع_٢ + و_٣ ع_٣ + \cdots\cdots + و_ن ع_ن}{و}$$

$$\overline{ع} = \frac{ج\left(و\, \tilde{ع}\right)}{ج\,(و)}$$

يمكن استبدال الوزن بالطول أو المساحة أو الحجم حسب عدد أبعاد الجسم من حيث له بُعد واحد أو بعدين أو ثلاث أبعاد على الترتيب .

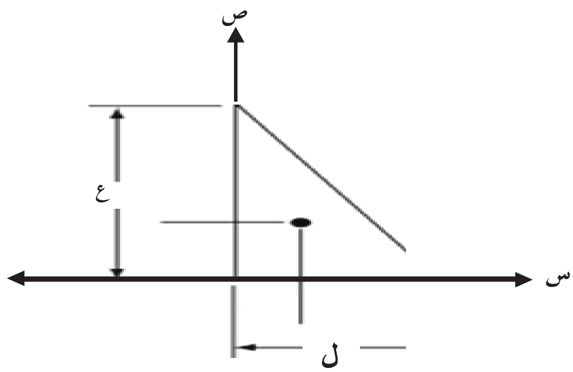
<u>٢-٣ مركز ثقل بعض الأشكال المشهورة</u>

١- مركز ثقل قضيب رفيع منتظم هو نقطه تقع عند منتصف طوله.

٢- مركز ثقل صفيحة رقيقه على شكل مثلث هو نقطة تقاطع متوسطات المثلث.

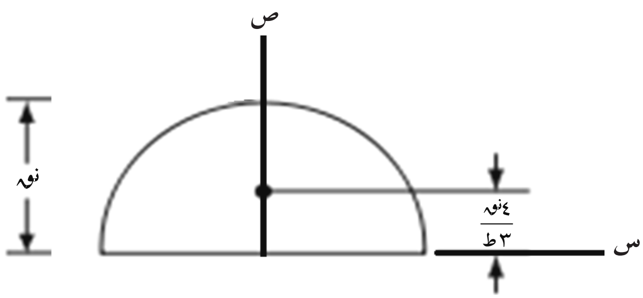
٣- إحداثيات مركز ثقل صفيحة رقيقة على شكل مثلث قائم الزاوية طول قاعدته ل وأرتفاعه ع

هو $\left(\frac{ل}{٣} ، \frac{ع}{٣}\right)$.

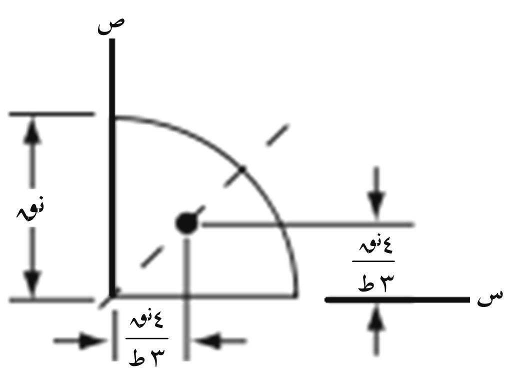


٤- مركز ثقل صفيحة رقيقه على شكل سطح دائرة هو مركزها الهندسى.

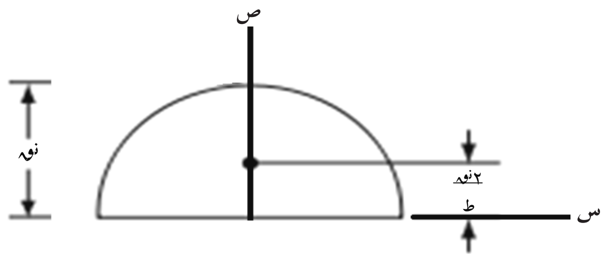
٥- إحداثيات مركز ثقل سطح نصف دائرة نصف قطرها نق هو $\left(٠ ، \frac{٤نق}{٣ط}\right)$.



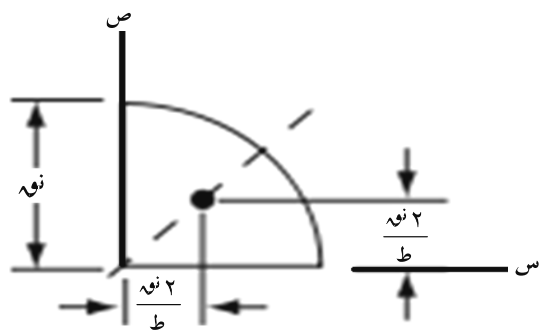
٦- إحداثيات مركز ثقل سطح ربع دائرة نصف قطرها نق هو $\left(\frac{٤نق}{٣ط} ، \frac{٤نق}{٣ط}\right)$.



٧- إحداثيات مركز ثقل قوس نصف دائرة نصف قطرها نق هو $(٠ ، \frac{٢نق}{ط})$.



٨- إحداثيات مركز ثقل قوس ربع دائرة نصف قطرها نق هو $(\frac{٢نق}{ط} ، \frac{٢نق}{ط})$.



٩- مركز ثقل صفيحة رقيقه على شكل مربع أو مستطيل هو نقطة تقاطع منصفات أضلاعه المتقابله.

١٠- مركز ثقل متوازى المستطيلات هو نقطة تقاطع أقطاره الداخلية.

٢-٤ حساب مركز الثقل للأشكال و الأجسام المركبة

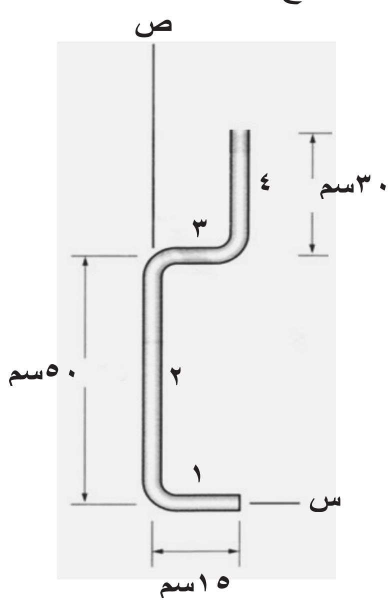
٢-٤-١ مركز ثقل المنحنى

يمكن تحديد مركز الثقل لخط مركب من عدة خطوط منتظمة بتقسيمها إلى خطوطها المنتظمة وتحديد طول كل خط وإحداثيات مركز الثقل الخاص به ثم نقوم بالتعويض فى القانون

$$\overline{\text{س}} = \frac{\text{ج}\left(\text{ل}\ \tilde{\text{س}}\right)}{\text{ج}\left(\text{ل}\right)} \quad ، \quad \overline{\text{ص}} = \frac{\text{ج}\left(\text{ل}\ \tilde{\text{ص}}\right)}{\text{ج}\left(\text{ل}\right)} \quad ، \quad \overline{\text{ع}} = \frac{\text{ج}\left(\text{ل}\ \tilde{\text{ع}}\right)}{\text{ج}\left(\text{ل}\right)}$$

مثال (1)

أوجد مركز ثقل القضيب الرفيع الموضح بالشكل



الحل

يمكن تقسيم الشكل إلى أربعة أجزاء. كل جزء له مركز ثقل معلوم

الشكل	ل	س̄	ص̄	ل س̄	ل ص̄
١	١٥	٧،٥	٠	١١٢،٥	٠
٢	٥٠	٠	٢٥	٠	١٢٥٠
٣	١٥	٧،٥	٥٠	١١٢،٥	٧٥٠
٤	٣٠	١٥	٦٥	٤٥٠	١٩٥٠
ج	١١٠			٦٧٥	٣٩٥٠

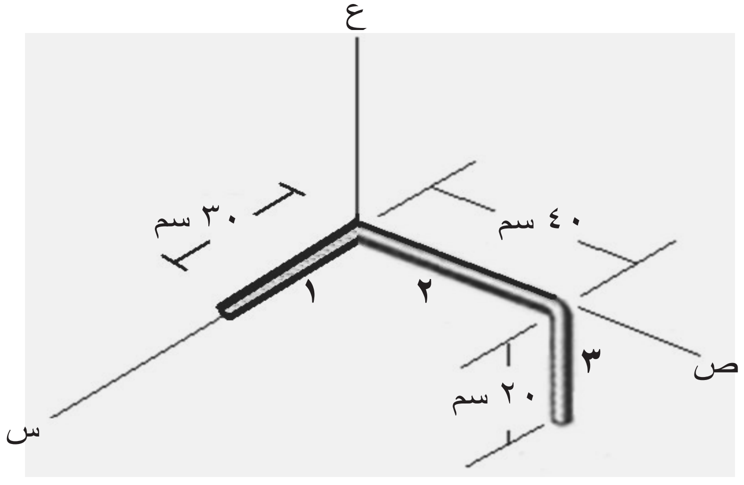
س̄ = ج(ل س̄) / ج(ل) = ٦٧٥ / ١١٠ = ٦,١ سم

ص̄ = ج(ل ص̄) / ج(ل) = ٣٩٥٠ / ١١٠ = ٣٥,٩ سم

∴ إحداثيات مركز الثقل هى (٤ ٠,٦،٢ ٤,٤)

مثال (2)

أوجد مركز ثقل القضيب الرفيع الموضح بالشكل



الحــل

يمكن تقسيم الشكل إلى ثلاث أجزاء

الشكل	ل	سَ	صَ	عَ	ل سَ	ل صَ	ل عَ
١	٣٠	١٥	٠	٠	٤٥٠	٠	٠
٢	٤٠	٠	٢٠	٠	٠	٨٠٠	٠
٣	٢٠	٠	٤٠	ـ١٠	٠	٨٠٠	ـ٢٠٠
ج	٩٠				٤٥٠	١٦٠٠	ـ٢٠٠

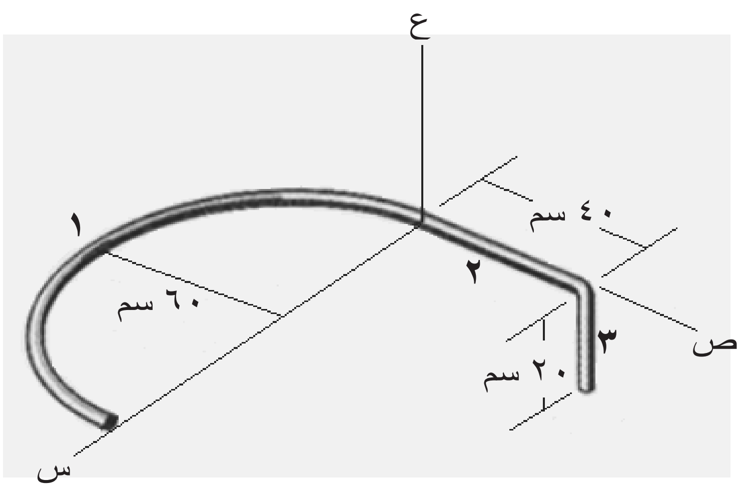
$$\bar{س} = \frac{ج(ل\ سَ)}{ج(ل)} = \frac{٤٥٠}{٩٠} = ٥ \text{ سم}$$

$$\bar{ص} = \frac{ج(ل\ صَ)}{ج(ل)} = \frac{١٦٠٠}{٩٠} = ١٧٫٧٨ \text{ سم}$$

$$\bar{ع} = \frac{ج(ل\ عَ)}{ج(ل)} = \frac{-٢٠٠}{٩٠} = -٢٫٢ \text{ سم}$$

∴ إحداثيات مركز الثقل هى (٥ ، ١٧٫٧٨ ، −٢٫٢)

مثال (3) أوجد مركز ثقل القضيب الرفيع الموضح بالشكل



الحـل

يمكن تقسيم الشكل إلى ثلاث أجزاء

الشكل	ل	سَ	صَ	عَ	ل سَ	ل صَ	ل عَ
١	٦٠ ط	٦٠	$-\frac{٢نق}{ط} = -\frac{٢\times٦٠}{ط}$	٠	١١٣٠٩,٧	‎-٧٢٠٠	٠
٢	٤٠	٠	٢٠	٠	٠	٨٠٠	٠
٣	٢٠	٠	٤٠	‎-١٠	٠	٨٠٠	‎-٢٠٠
ج	٢٤٨,٥				١١٣٠٩,٧	‎-٥٦٠٠	‎-٢٠٠

$$\overline{س} = \frac{ج\left(ل\ سَ\right)}{ج\left(ل\right)} = \frac{١١٣٠٩,٧}{٢٤٨,٥} = ٤٥,٥ \text{ سم}$$

$$\overline{ص} = \frac{ج\left(ل\ صَ\right)}{ج\left(ل\right)} = \frac{-٥٦٠٠}{٢٤٨,٥} = ٢٢,٥ \text{ سم}$$

$$\bar{ع} = \frac{ج \left(ل \, \tilde{ع} \right)}{ج \left(ل \right)} = \frac{-٢٠٠}{٢٤٨,٥} = -٠,٨ \text{ سم}$$

∴ إحداثيات مركز الثقل هى $\left(٤٥,٥ \text{ ، } ٢٢,٥ \text{ ، } -٠,٨ \right)$

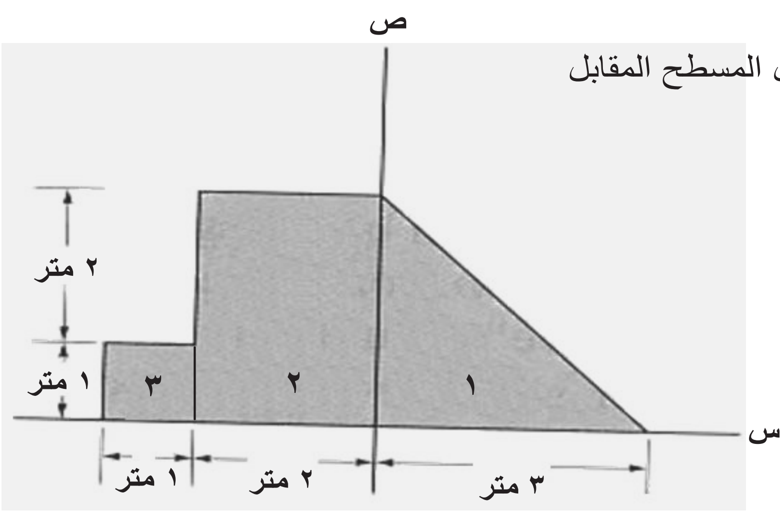
٢-٤-٢ مركز ثقل السطوح المستويه

يمكن تحديد مركز الثقل لمساحة مركبة من عدة أشكال منتظمة بتقسيمها إلى أشكالها المنتظمة وتحديد مساحة كل شكل وإحداثيات مركز الثقل الخاص بها ثم نقوم بالتعويض فى القانون

$$\bar{س} = \frac{ج \left(م \, \tilde{س} \right)}{ج \left(م \right)} \text{ ، } \bar{ص} = \frac{ج \left(م \, \tilde{ص} \right)}{ج \left(م \right)} \text{ ، } \bar{ع} = \frac{ج \left(م \, \tilde{ع} \right)}{ج \left(م \right)}$$

مثال (4)

أوجد مركز ثقل المسطح المقابل



الحــل

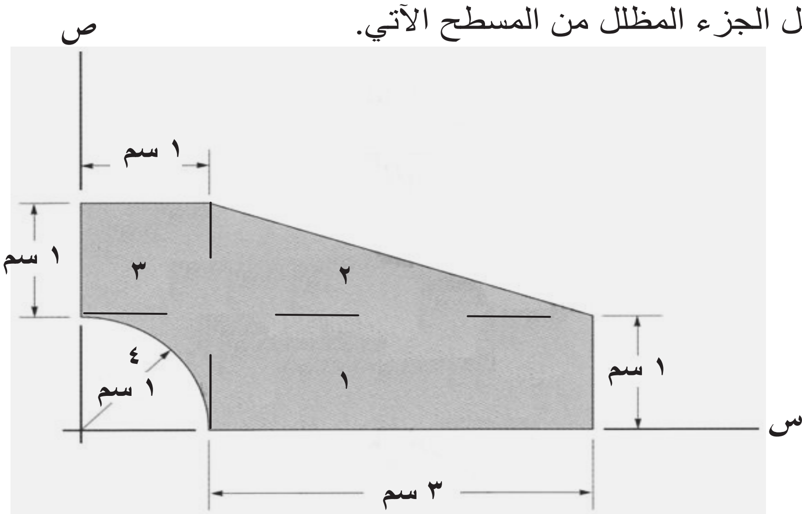
م صَ	م سَ	صَ	سَ	م	الشكل
٤,٥	٤,٥	١	١	$\frac{١}{٢} \times ٣ \times ٣ = ٤,٥$	١
٩	٦-	١,٥	١-	$٢ \times ٣ = ٦$	٢
٠,٥	٢,٥-	٠,٥	٢,٥-	$١ \times ١ = ١$	٣
١٤	٤-			١١,٥	ج

$$\overline{س} = \frac{ج\,(م\,سَ)}{ج\,(م)} = \frac{-٤}{١١,٥} = -٠,٣٤٨ \text{ متر}$$

$$\overline{ص} = \frac{ج\,(م\,صَ)}{ج\,(م)} = \frac{١٤}{١١,٥} = ١,٢١٧ \text{ متر}$$

مثال (5)

أوجد مركز ثقل الجزء المظلل من المسطح الآتي.



الحل

الشكل	م	سَ	صَ	م سَ	م صَ
١	$\text{٤} \times \text{١} = \text{٤}$	٢	٠,٥	٨	٢
٢	$\frac{\text{١}}{\text{٢}} \times \text{٣} \times \text{١} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}}$	$\text{١} + \text{١} = \text{٢}$	$\text{١} + \text{١} \times \frac{\text{١}}{\text{٣}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣}}$	٣	٢
٣	$\text{١} \times \text{١} = \text{١}$	٠,٥	١,٥	٠,٥	١,٥
٤	$\frac{-\text{ط نق}^{\text{٢}}}{\text{٤}} = -\frac{-\text{ط}}{\text{٤}}$	$\frac{\text{٤نق}}{\text{٣ط}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣ط}}$	$\frac{\text{٤نق}}{\text{٣ط}} = \frac{\text{٤}}{\text{٣ط}}$	$-\frac{\text{١}}{\text{٣}}$	$-\frac{\text{١}}{\text{٣}}$
ج	٥,٧١٥			١١,١٧	٥,١٧

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{ج}\left(\text{م سَ}\right)}{\text{ج}\left(\text{م}\right)} = \frac{\text{١١,١٧}}{\text{٥,٧١٥}} = \text{١,٩٥٤ سم}$$

$$\bar{\text{ص}} = \frac{\text{ج}\left(\text{م صَ}\right)}{\text{ج}\left(\text{م}\right)} = \frac{\text{٥,١٧}}{\text{٥,٧١٥}} = \text{٠,٩٠٥ سم}$$

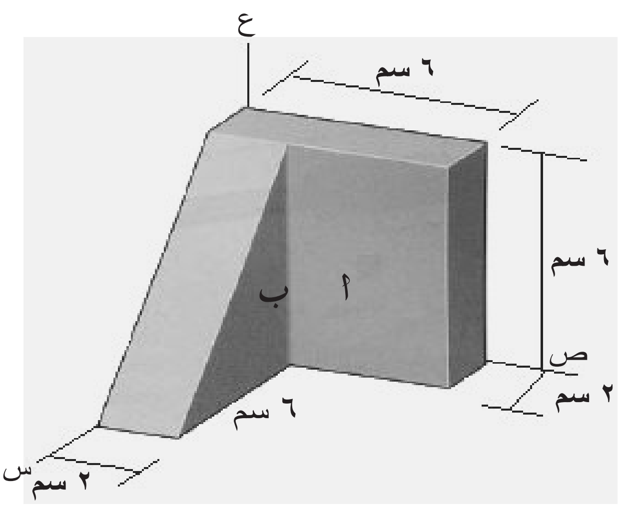
٢-٤-٣ مركز ثقل الأجسام

يمكن تحديد مركز الثقل لجسم مركب من عدة أجسام منتظمة بتقسيمه إلى أجسام منتظمة وتحديد حجم " ح" أو وزن كل جسم "و" وإحداثيات مركز الثقل الخاص بها "$\tilde{س}$" ثم نقوم بالتعويض فى القانون

$$\bar{س} = \frac{ج\left(و\ \tilde{س}\right)}{ج(و)} \quad ، \quad \bar{ص} = \frac{ج\left(و\ \tilde{ص}\right)}{ج(و)} \quad ، \quad \bar{ع} = \frac{ج\left(و\ \tilde{ع}\right)}{ج(و)}$$

مثال (6)

قطعتان من مادتين مختلفتين ، القطعة "أ" من الحديد كثافتها ٧,٨ جم/سم^{٣} والقطعة "ب" من النحاس كثافتها ٨,٩ جم/سم^{٣}، أوجد مركز ثقل الجسم كله



الحــل

الكتلة = الحجم × الكثافة

كتلة القطعة "أ" = $(٦\times٦\times٢)\times٧,٨ = ٥٦١,٦$ جم

كتلة القطعة "ب" = $(٠,٥ \times ٦ \times ٦ \times ٢) \times ٨,٩ = ٣٢٠,٤$ جم

الشكل	ك	$\bar{س}$	$\bar{ص}$	$\bar{ع}$	و $\bar{س}$	و $\bar{ص}$	و $\bar{ع}$
أ	٥٦١,٦	١	٣	٣	٥٦١,٦	١٦٨٤,٨	١٦٨٤,٨
ب	٣٢٠,٤	$٢ + \frac{٦}{٣} = ٤$	١	$\frac{٦}{٣} = ٢$	١٢٨١,٦	٣٢٠,٤	٦٤٠,٨
ج	٨٨٢				١٨٤٣,٢	٥٩,٣٨	٢٣٢٤,٨

$$\bar{س} = \frac{ج \left(و \bar{س}\right)}{ج (و)} = \frac{١٨٤٣,٢}{٨٨٢} = ١,٤٧ \text{ سم}$$

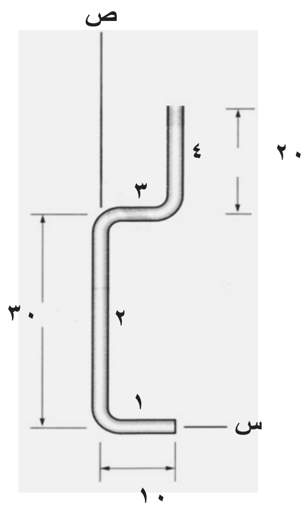
$$\bar{ص} = \frac{ج \left(و \bar{ص}\right)}{ج (و)} = \frac{٥٩,٣٨}{٨٨٢} = ٠,٠٦٧ \text{ سم}$$

$$\bar{ع} = \frac{ج \left(و \bar{ع}\right)}{ج (و)} = \frac{٢٣٢٤,٨}{٨٨٢} = ٢,٦٣٦ \text{ سم}$$

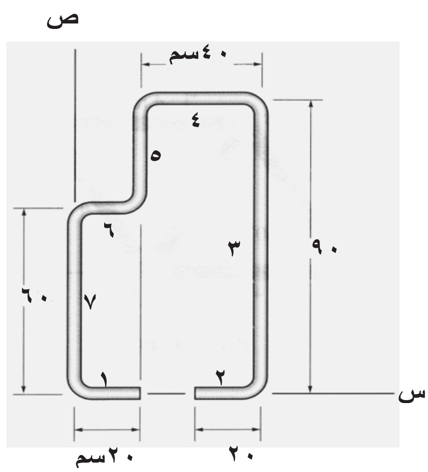
إحداثيات مركز الثقل هى $(١,٤٧ ، ٠,٠٦٧ ، ٢,٦٣٦)$

تمارين (٢)

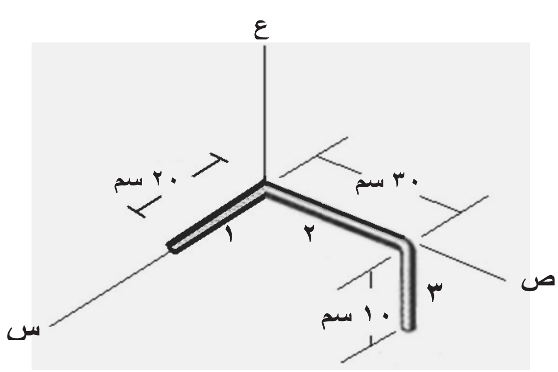
(١) أوجد مركز ثقل الخط المركب الموضح بالشكل



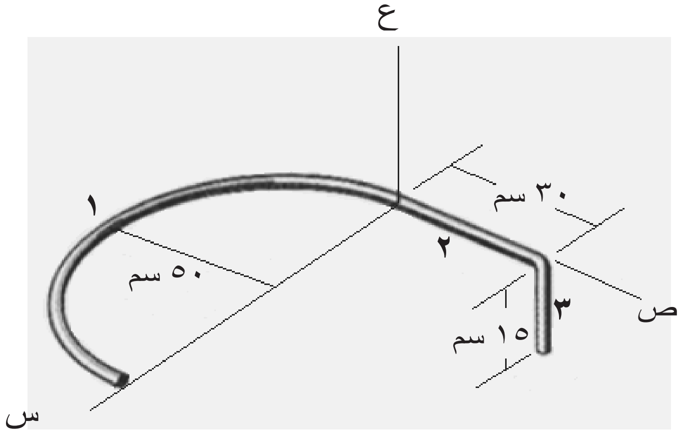
(٢) أوجد مركز ثقل الخط المركب الموضح بالشكل



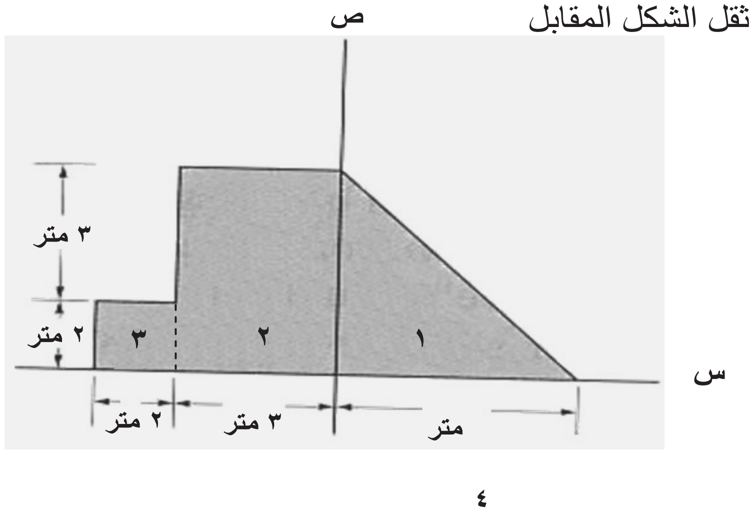
(٣) أوجد مركز ثقل الخط المركب الموضح بالشكل



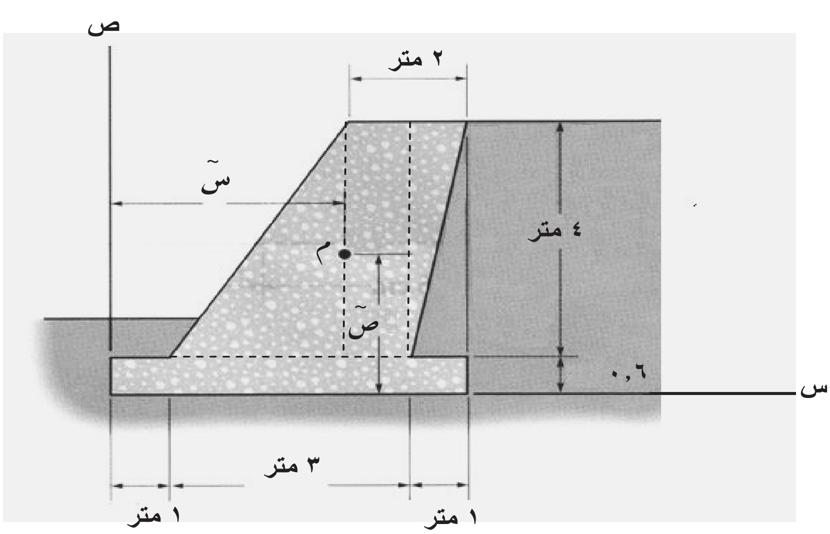
(٤) أوجد مركز ثقل الخط المركب الموضح بالشكل



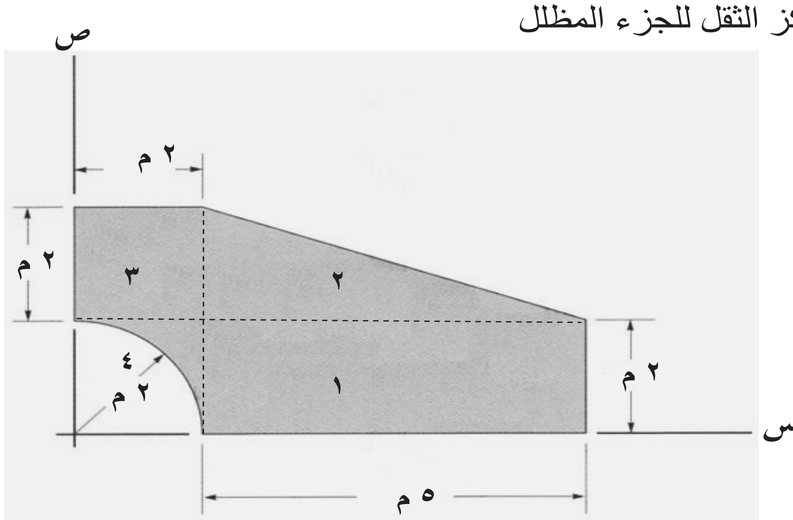
(٥) أوجد مركز ثقل الشكل المقابل



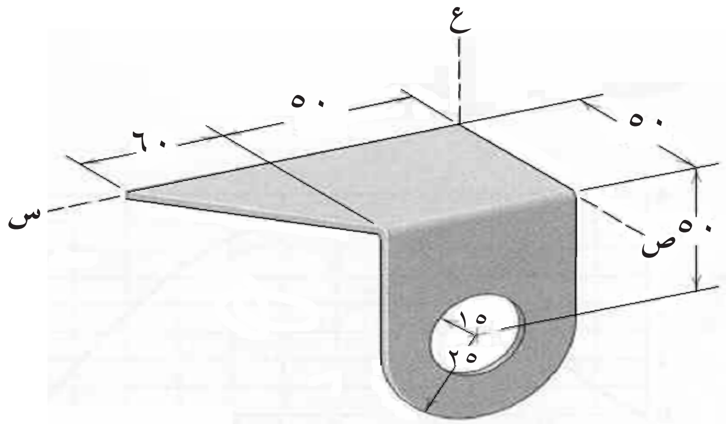
(٦) أوجد مركز ثقل الشكل المقابل



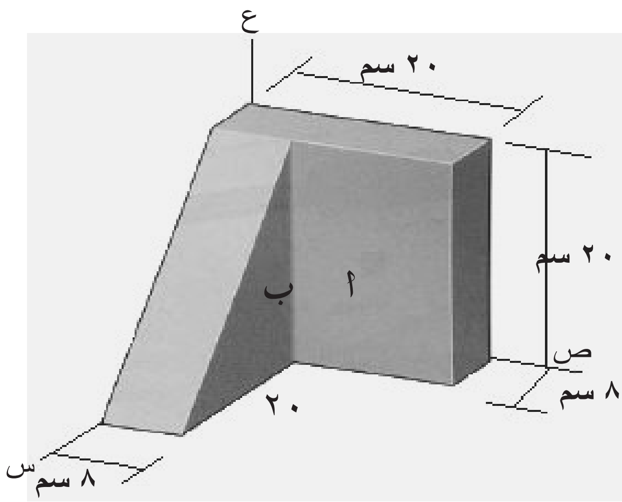
(٧) أوجد مركز الثقل للجزء المظلل



(٨) أوجد مركز ثقل الجسم المقابل ، علماً بأن وحدة الأطوال المستخدمة سنتيمتر .



(٩) قطعتان من مادتين مختلفتين ، القطعة "أ" من الحديد كثافتها ٧,٨ جم/سم^{٣} والقطعة "ب" من النحاس كثافتها ٨,٩ جم/سم^{٣}، أوجد مركز ثقل الجسم كله



الديناميكا

- **الوحدة الأولى**
القصور الذاتى
عدد الحصص الدراسية ١٢
- **الوحدة الثانية**
قوانيين نيوتن للحركة
عدد الحصص الدراسية ١٦
- **الوحدة الثالثة**
الشغل
عدد الحصص الدراسية ١٠
- **الوحدة الرابعة**
الطاقة
عدد الحصص الدراسية ١٢
- مراجعة
عدد الحصص الدراسية ٤

الوحدة الأولى

القصور الذاتى

١-١ تعريف عزم القصور الذاتى

١-٢ حساب عزم القصور الذاتى عند محور مار بمركز ثقل الجسم

١-٣ نصف قطر القصور الذاتى

١-٤ وحدة قياس عزم القصور الذاتى

١-٥ عزم القصور الذاتى لبعض الأشكال و الأجسام الشهيرة حول محور مار بمركز الثقل

١-٦ حساب عزم القصور الذاتى حول محور لا يمر بمركز ثقل الجسم

"نظرية المحاور المتوازية"

مقدمة :

دائماً ما نتعرض عند دراسة الحركة والسكون للأجسام للعجز التى تتعرض له الأجسام عن التحول من حالة السكون إلى حالة الحركة ، أو من حالة الحركة إلى حالة السكون وهذا يدفعنا لدراسة هذه الظاهرة وهى القصور الذاتى وما له من تطبيقات كثيرة فى عالم الصناعة منها قرص الحداف في محرك السيارة الذى يعمل على استمرار دوران عمود المكابس داخل المحرك وذلك بسبب كتلته الكبيرة التي تسبب زيادة عزم القصور الذاتي لديه ، كما يساهم الحداف أيضا في ثبات سرعة الحركة الدورانية للعمود مما يعطي انتظاما في حركة السيارة .

١- عزم القصور الذاتى (Moment Of Inertia)

١-١ تعريف عزم القصور الذاتى

يعرف القصور الذاتي بأنه مقاومة الجسم للتغير الطارئ على حالته الحركية .

أى أننا نلاحظ القصور الذاتي عندما يعجز الجسم عن التحول من حالة السكون إلى حالة الحركة ، أو من حالة الحركة إلى حالة السكون ، أو أثناء تغيير اتجاه حركته.

ولقد عبر نيوتن عن القصور الذاتى في قانونه الأول المعروف بقانون القصور الذاتى وهو خاصية مقاومة الجسم المادى لتغيير حالته من السكون أو الحركة بسرعة منتظمة وفى خط مستقيم ما لم تؤثر عليه قوة تغير من حالته. هذا القصور نفسه هو الذى يقاوم التسارع المفروض على الجسم عندما تتسارع حركتة، فعندما نكون في سيارة و تتسارع فجأة نشعر بقوة جذب خلفية تعاكس جهة التسارع .

١-٢ حساب عزم القصور الذاتى عند محور مار بمركز ثقل الجسم

عزم القصور الذاتى عند مركز الثقل لجسم كتلته ك ونصف قطر دورانه (نصف قطر قصوره الذاتى) نوه .

عزم القصور الذاتى = ك نوه ٢

١-٣ نصف قطر القصور الذاتي (Radius of Gyration)

وهو الجذر التربيعى للنسبه بين عزم القصور الذاتى عند مركز ثقل الجسم وكتلة الجسم.

$$نق = \sqrt{\frac{ع_ن}{ك}}$$

١-٤ وحدة قياس عزم القصور الذاتى

وحدة كتله × مربع وحدة المسافة

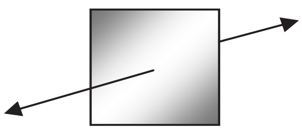
كجم . م^{٢} ، جم . سم^{٢}

١-٥ عزم القصور الذاتى لبعض الأشكال و الأجسام الشهيرة حول محور مار بمركز الثقل

(١) صفيحة مستطيله مستوية أبعادها س ، ص

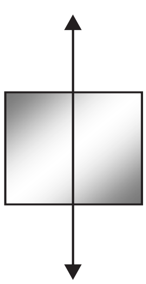
(أ) محور الدوران عمودى على الصفيحة ويمر بالمركز

عزم القصور الذاتى لصفيحة منتظمة السُمك و الكثافة على شكل مستطيل طولها س و عرضها ص و كتلتها ك حول محورها :



$$ع_ن = \frac{١}{١٢} ك \left(س^{٢} + ص^{٢} \right)$$

(ب) محور الدوران مواز لطرف الصفيحة ص ومار بمركزها

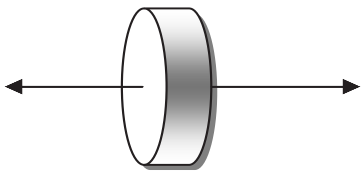


$$ع_ن = \frac{١}{١٢} ك س^{٢}$$

(٢) قرص رقيق نصف قطره نق

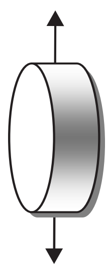
(أ) محور الدوران يمر بمركز القرص عمودى على مستوى القرص

عزم القصور الذاتى لقرص دائرى منتظم السُمك و الكثافة نصف قطره (نق) و كتلته ك حول محوره :



$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{١}{٢}\ \text{ك نق}^{٢}$$

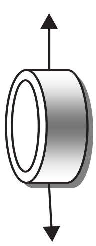
(ب) محور الدوران يمر بمركز القرص وفى مستوى القرص



$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{١}{٤}\ \text{ك نق}^{٢}$$

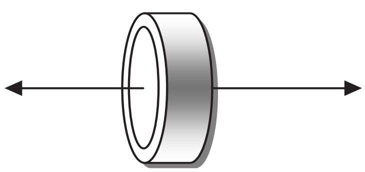
(٣) حلقه دائريه رفيعه منتظمة نصف قطرها (نق)

(أ) عزم القصور الذاتى لحلقه دائريه رفيعه منتظمة نصف قطرها (نق) و كتلتها ك حول محورها يمر بمركزها فى مستواها



$$\text{ع}_{\text{ن}} = \frac{١}{٢}\ \text{ك نق}^{٢}$$

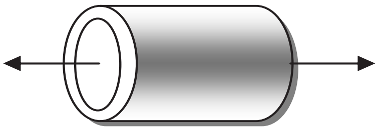
(ب) عزم القصور الذاتى لحلقه دائريه رفيعه منتظمة نصف قطرها (نق) و كتلتها ك حول محورها يمر بمركزها عمودى على مستواها



$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ك نق}^{٢}$$

(٤) قشرة اسطوانيه نصف قطرها نق

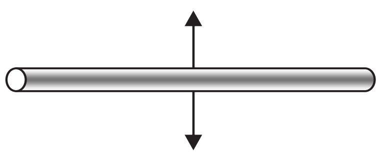
(أ) عزم القصور الذاتى لقشرة اسطوانيه نصف قطرها (نق) و محور الدوران محورها الطولى و كتلتها ك



$$ع_{ن} = ك\,(نق_{٢}^{٢} - نق_{١}^{٢})$$

(٥) عزم القصور الذاتى لسلك منتظم

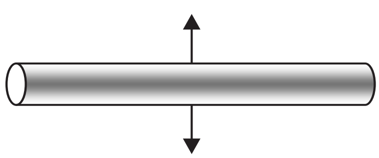
(ب) عزم القصور الذاتى لسلك منتظم طوله ل و كتلته ك حول محور دوران عمودى على السلك عند منتصف طوله



$$ع_{ن} = \frac{١}{١٢} \times ك\, ل^{٢}$$

(٦) عزم القصور الذاتى لأسطوانه صلبة قائمة

(ب) عزم القصور الذاتى لأسطوانه صلبة قائمة نصف قطرها نق وارتفاعها ل حول محور يمر بالمركز عمودى على محورها



$$ع_{ن} = \frac{١}{١٢} \times ك \times (نق^{٢} + ل^{٢})$$

(٧) عزم القصور الذاتى لكرة صلبة مصمطه

عزم القصور الذاتى لكرة صلبة مصمطه نصف قطرها نق و كتلتها ك حول أى قطر فيها

$$ع_{ن} = \frac{٢}{٥} ك\, نق^{٢}$$

(٨) عزم القصور الذاتى قشرة كروية رقيقة

عزم القصور الذاتى قشرة كروية رقيقة نصف قطرها نق و كتلتها ك حول أى قطر فيها

$$ع_{ن} = \frac{٣}{٢} ك نق^{٢}$$

(٩) متوازى مستطيلات صلب قائم

متوازى مستطيلات صلب قائم أبعاده س ، ص ، ع حول محور يمر بالمركز عمودى على الوجه

س ، ص وموازٍ للطرف ع

$$ع_{ن} = \frac{١}{١٢} ك \left(س^{٢} + ص^{٢}\right)$$

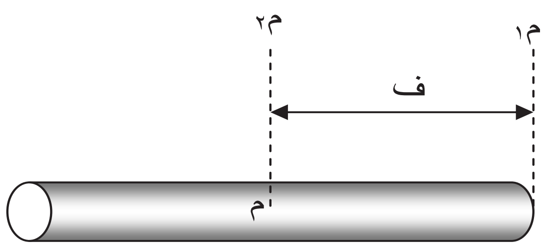
م	الجسم	محور الدوران	$\text{نق}^{٢}$
١	سلك رفيع طوله ل	• عمودى على السلك عند المركز	$\frac{\text{ل}^{٢}}{١٢}$
٢	صفيحة مستطيله مستوية أبعادها س ، ص	• مواز لطرفها ص ومار بالمركز	$\frac{\text{س}^{٢}}{١٢}$
		• عمودى عليها ويمر بالمركز	$\frac{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}{١٢}$
٣	قرص رقيق نصف قطره نق	• يمر بالمركز فى مستواه	$\frac{\text{نق}^{٢}}{٤}$
		• يمر بالمركز عمودى على مستواه	$\frac{\text{نق}^{٢}}{٢}$
٤	حلقة رقيقه نصف قطره نق	• يمر بالمركز فى مستواها	$\frac{\text{نق}^{٢}}{٢}$
		• يمر بالمركز عمودى على مستواها	$\text{نق}^{٢}$
٥	قشرة اسطوانيه نصف قطرها نق	• محورها الطولى	$\text{نق}^{٢}$
٦	اسطوانيه صلبة قائمة نصف قطرها نق وارتفاعها ل	• محورها الطولى	$\frac{\text{نق}^{٢}}{٢}$
		• يمر بالمركز عمودى على محورها	$\frac{\text{نق}^{٢}+\text{ل}^{٢}}{١٢}$
٧	كرة صلبة مصمطه نصف قطرها نق	• أى قطر فيها	$\frac{٢\,\text{نق}^{٢}}{٥}$
٨	قشرة كروية رقيقة نصف قطرها نق	• أى قطر فيها	$\frac{٢\,\text{نق}^{٢}}{٣}$
٩	متوازى مستطيلات صلب قائم أبعاده س ، ص ، ع	• يمر بالمركز عمودى على الوجه س ، ص ومواز للطرف ع	$\frac{\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}}{١٢}$

مربع نصف قطر الدوران لبعض الأجسام الصلبة ($\text{نق}^{٢}$).

٦-١ حساب عزم القصور الذاتى حول محور لا يمر بمركز ثقل الجسم

نظرية المحاور المتوازية (Parallel Axis Theorem)

هى نظرية هامة وتسمح لنا بمعرفة عزم القصور الذاتى عند أى محور بخلاف مركز ثقل الجسم



فى الشكل المقابل إذا كان

ع ق : عزم القصور الذاتى لجسم حول المحور $م_{١}$.

ع ق م : عزم القصور الذاتى لجسم حول المحور $م_{٢}$ المار بمركز الثقل م .

ك : كتلة الجسم .

ف : المسافة العموديه بين المحورين المتوازيين $م_{١}$ ، $م_{٢}$.

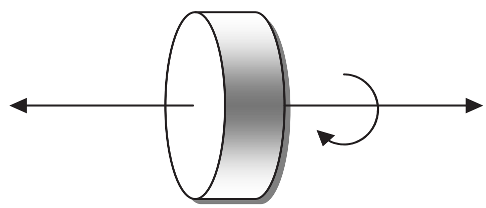
فإن قانون حساب عزم القصور الذاتى حول المحور $م_{١}$ يكون على الصورة

$$ع_{ق} = ع_{قم} + ك\,ف^{٢}$$

مثال (1)

أوجد عزم القصور الذاتى حول محور ما بمركز قرص و عمودى على دائرته ونصف قطره ٠,١ متر و كتلته ٠,٢ كجم . علماً بأن مربع نصف قطر القصور الذاتى لقرص صلب قائم نصف قطره نق حول محوره $\frac{١}{٢}$ نق^{٢}

الحـل



$$ع_{ن} = \frac{١}{٢} \text{ك نق}^{٢}$$

$$ع_{ن} = \frac{١}{٢} \times ٠,٢ \times (٠,١)^{٢}$$

$$ع_{ن} = ٠,٠٠١ \text{ كجم . م}^{٢}$$

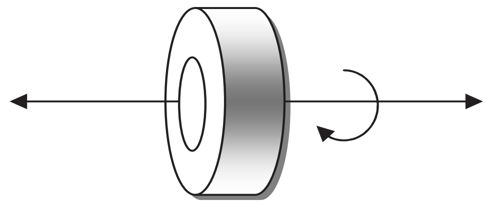
مثال (2)

أوجد عزم القصور الذاتى حول محور مار بمركز قرص نصف قطره ٠,٢٥ متر و به ثقب حول مركزه على شكل قرص نصف قطره ٠,١٢٥ متر و سُمكها ٠,٠١ متر و كثافة مادتها ٨٠٠٠ كجم / م^{٣} .

علماً بأن مربع نصف قطر القصور الذاتى لقرص صلب قائم نصف قطره نق حول محوره

$\frac{١}{٢}$ نق^{٢}

الحــل



الكتلة = الحجم × الكثافة

$ك_{١} = ط × (٠,٢٥)^{٢} × ٠,٠١ × ٨٠٠٠ = ١٥,٧$ كجم

$ك_{٢} = ط × (٠,١٢٥)^{٢} × ٠,٠١ × ٨٠٠٠ = ٣,٩$ كجم

$$ع_{ن} \text{ للقرص} = \frac{١}{٢} ك_{١} نو_{١}^{٢} - \frac{١}{٢} ك_{٢} نو_{٢}^{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} × ١٥,٧ × (٠,٢٥)^{٢} - \frac{١}{٢} × ٣,٩ × (٠,١٢٥)^{٢}$$

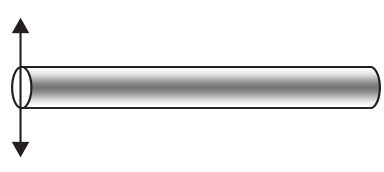
$$= ٠,٤٩ - ٠,٠٣ = ٠,٤٦ \text{ كجم . م}^{٢}$$

مثال (3)

أوجد عزم القصور الذاتى لقضيب رفيع طوله ١ متر وكتلته ٠,٥ كجم حول محور دوران عمودى على القضيب عند طرفه.

علماً بأن مربع نصف قطر القصور الذاتى لقضيب رفيع حول محوره $\frac{ل^{٢}}{١٢}$

الحــل



$$ع_{ن} = ع_{ن م} + ك ف^{٢}$$

$$ع_{ن} = \frac{ك ل^{٢}}{١٢} + ك \left(\frac{ل}{٢}\right)^{٢} = \frac{ك ل^{٢}}{٣}$$

وبذلك فإنه يمكن اعتبار عزم القصور الذاتى لقضيب رفيع طوله "ل" وكتلته "ك" حول محور

دوران عمودى على القضيب عند طرفه هو $\frac{ك ل^{٢}}{٣}$

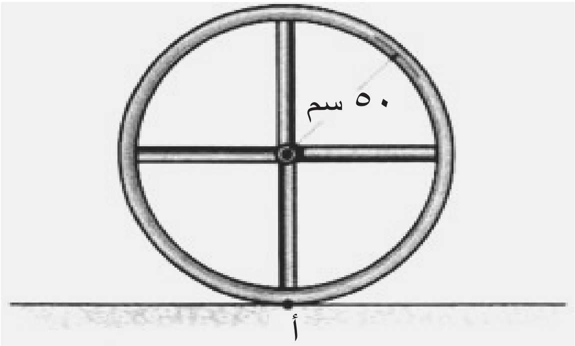
$$ع_{ن} = \frac{٠,٥ (١)^{٢}}{٣} = \frac{١}{٦} \text{ كجم . م}^{٢}$$

مثال (4)

عجلة تتكون من حلقة رفيعة كتلتها ١٠ كجم و نصف قطرها ٥٠ سم بها أربعة أسلاك على شكل قضبان كتلة كل منها ٢ كجم متلاقيه عند مركز العجلة . عين عزم القصور الذاتى للعجلة حول محور عمودى على الورقة و يمر بنقطة أ .

علماً بأن مربع نصف قطر القصور الذاتى لكل من حلقه رفيعه محور دورانها يمر بالمركز عمودى على مستواها وقضيب رفيع طوله "ل" حول محور دوران عمودى على القضيب عند طرفه هو على الترتيب $\frac{ل^{٢}}{٣}$ ، $نو^{٢}$

الحــل



ع$_{ن}$ الحلقة = ك نق^{٢} + ك ف^{٢}

ع$_{ن}$ الحلقة = ١٠ × (٠,٥^{٢}) + ١٠ × (٠,٥^{٢})

= ٥ كجم . م^{٢}

نظراً لأن دوران السلك عند الطرف فإن عزم القصور يُحسب من العلاقه

ع$_{ن}$ للسلك = $\frac{١}{٣}$ ك ل^{٢} + ك ف^{٢}

ع$_{ن}$ للسلك = $\frac{١}{٣}$ × ٢ × (٠,٥)^{٢} + ٢ × (٠,٥)^{٢}

= ٠,٦٦٧ كجم . م^{٢}

ع$_{ن}$ = ع$_{ن}$ للحلقة + ٤ × ع$_{ن}$ للسلك = ٥ + ٤ × ٠,٦٦٧ = ٧,٦٦٧ كجم . م^{٢}

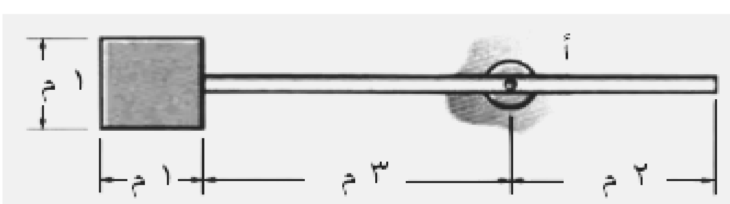
مثال (5)

بندول يتكون من شريحة على شكل مستطيل وزنها ١٢ كجم متصله من منتصف أحد أضلاعها بقضيب خفيف كتلته ٤ كجم و طوله ٥ متر مثبت عند نقطه (أ) تعلو الشريحه بمسافة ٢ متر .

أوجد عزم القصور الذاتى حول محور عمودى على الورقة و يمر بنقطة أ .

علماً بأن مربع نصف قطر القصور الذاتى لصفيحه على شكل مستطيل أبعادها س ، ص حول محور يمر بمركز ثقلها وعمودى عليها هو $\frac{١}{١٢}$(س^{٢} + ص^{٢})

الحـل



$$ع_{ن}\ \text{الصفيحة} = \frac{١}{١٢}\left(س^{٢} + ص^{٢}\right)ك + ك\,ف^{٢}$$

$$ع_{ن}\ \text{الصفيحة} = \frac{١}{١٢} \times ١٢ \times \left(١^{٢} + ١^{٢}\right) + ١٢ \times (٣,٥)^{٢}$$

$$= ١٤٩\ \text{كجم . م}^{٢}$$

$$ع_{ن}\ \text{للقضيب} = \frac{١}{١٢}\ ك\,ل^{٢} + ك\,ف^{٢}$$

$$ع_{ن}\ \text{للقضيب} = \frac{١}{١٢} \times ٤ \times (٥)^{٢} + ٤ \times (٠,٥)^{٢}$$

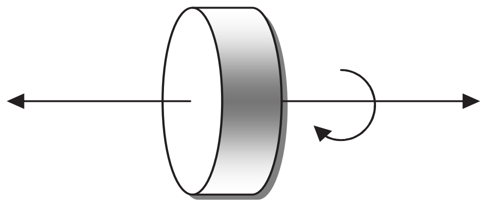
$$= ٩,٣٣\ \text{كجم . م}^{٢}$$

$$ع_{ن}\ \text{الكلى} = ع_{ن}\ \text{الصفيحة} + ع_{ن}\ \text{القضيب}$$

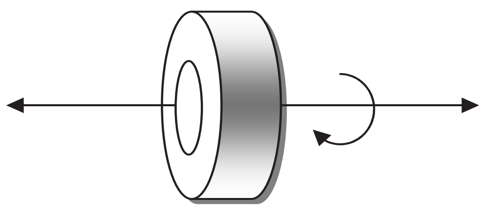
$$= ١٤٩ + ٩,٣٣ = ١٥٨,٣٣\ \text{كجم . م}^{٢}$$

تمارين (١)

(١) أوجد عزم القصور الذاتى حول محور ما بمركز قرص و عمودى على دائرته ونصف قطره ٠,٤ متر و كتلته ٠,٥ كجم .

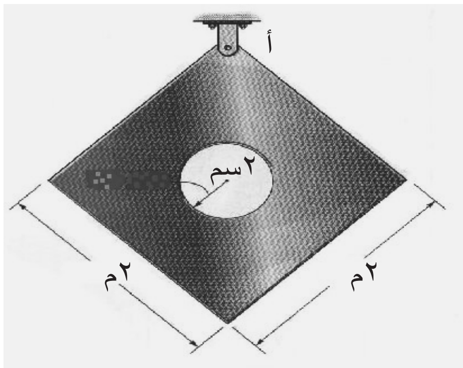


(٢) أوجد عزم القصور الذاتى حول محور مار بمركز دائرة قرص و عمودى عليها نصف قطره ٠,٢ متر و به تقب عند مركزه على شكل قرص نصف قطره ٠,١ متر و سُمكها ٠,٠٢ متر و كثافة مادتها ٩٠٠ كجم / م^{٣}

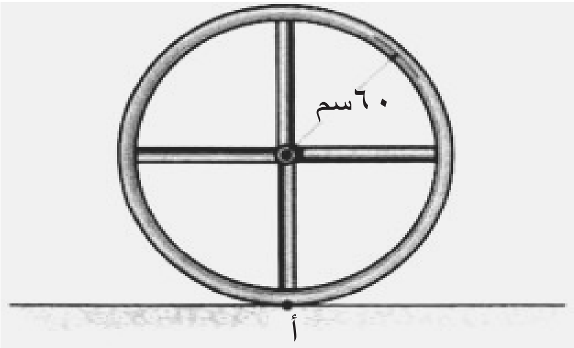


(٣) أوجد عزم القصور الذاتى لقضيب رفيع طوله ٢ متر وكتلته ٠,٨ كجم حول محور دوران عمودى على القضيب عند طرفه

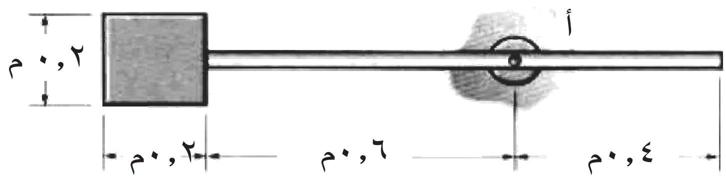
(٤) صفيحة على شكل مربع طول ضلعه ٢ متر سُمكها ٣٠ مم بها فجوة على شكل دائرة عند مركزها نصف قطر دائرتها ٢ سم . أوجد عزم القصور الذاتى حول محور عمودى على الورقة و يمر بنقطة (أ) .



(٥) عجلة تتكون من حلقة رفيعة كتلتها ١٥ كجم و نصف قطرها ٦٠ سم بها أربعة أسلاك على شكل قضبان كتلة كل منها ١ كجم متلاقيه عند مركز العجلة . عين عزم القصور الذاتى للعجلة حول محور عمودى على الورقة و يمر بنقطة أ .



(٦) بندول يتكون من شريحة على شكل مستطيل وزنها ٢ كجم متصله من منتصف أحد أضلاعها بقضيب خفيف كتلته ١ كجم و طوله ١ متر مثبت عند نقطه (أ) تعلو الشريحه بمسافة ٠,٦ متر . أوجد عزم القصور الذاتى حول محور عمودى على الورقة و يمر بنقطة أ .



الوحدة الثانية
قوانيين نيوتن للحركة

٢-١ مخطط القوة

٢-٢ كمية الحركة

٢-٣ كمية الحركة الزاوية

٢-٤ العلاقة بين كمية الحركة الزاوية والسرعة الزاوية والقصور الذاتى للجسم

٢-٥ قوانين نيوتن للحركة

٢-٦ قوانين نيوتن في التحريك الدورانى

٢-٧ مبدأ حفظ كمية الحركة الزاوية

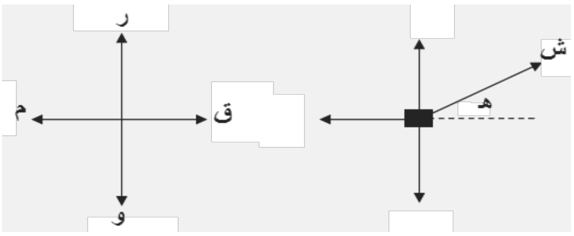
مقدمة :

قوانين نيوتن للحركة تعتبر حجر الأساس للميكانيكا الكلاسيكية، هذه القوانين تعمل على ربط القوى المؤثرة على الجسم بحركته. وقد وضعها أسحاق نيوتن واستخدم هذه القوانين في تفسير العديد من الأنظمة والظواهر الميكانيكية.

٢ - قوانيين نيوتن للحركة

٢-١ مخطط القوة (Force Diagrams)

هو رسم تخطيطى يحدد مركبات القوى المؤثره على الجسم و المسببة لحالة سكونه أو حركتة.

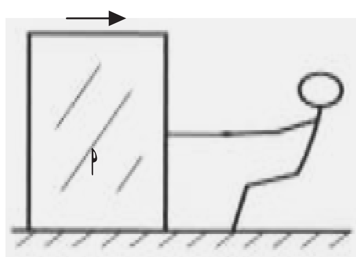


وسنعتمد على الرموز الآتية أثناء الرسم

ق : القوة ، ش : قوة الشد ، و : وزن الجسم

هـ : الزاوية ، م : قوة الاحتكاك ، ر : قوة رد الفعل

مثال (1) فى الشكل المقابل



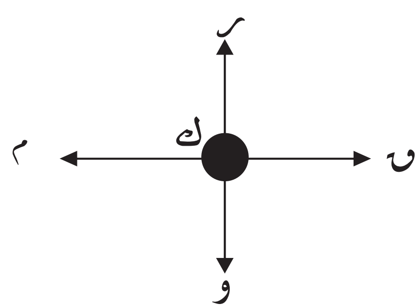
أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم (أ) .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة .

(٣) معادلة القوى المتزنة .

الحــل

(١)

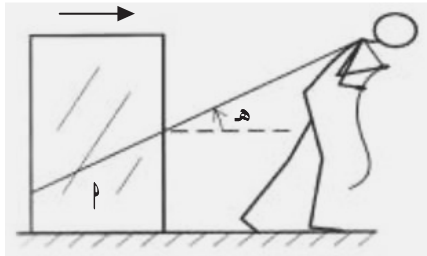


(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة الأفقية = ق − م

(٣) حيث أن الجسم لا يتحرك رأسياً فإن معادلة القوى المتزنة ر = و

مثال (2)

فى الشكل المقابل



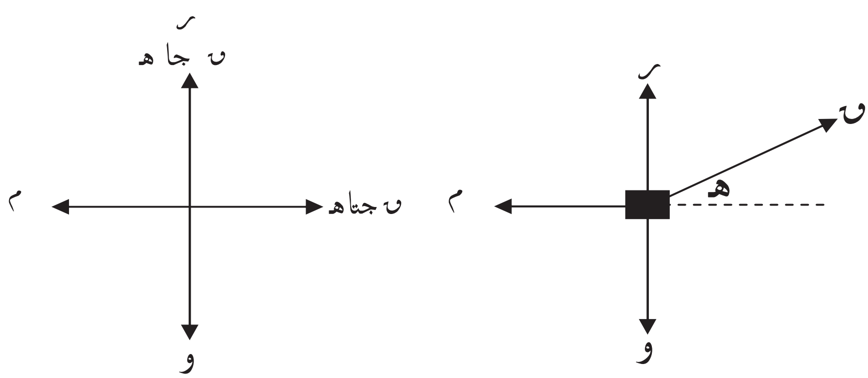
أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم (أ) .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة .

(٣) معادلة القوى المتزنة .

الحــل

(١)

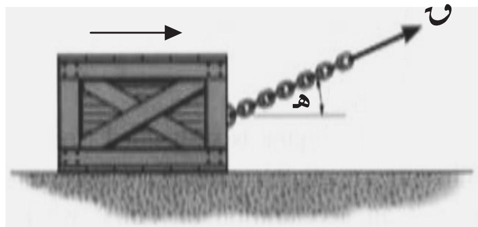


(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة الأفقية = ن جتاهـ – م

(٢) حيث أن الجسم لا يتحرك رأسياً فإن معادلة القوى المتزنة هى ر + ن جاهـ = و

مثال (3)

فى الشكل المقابل



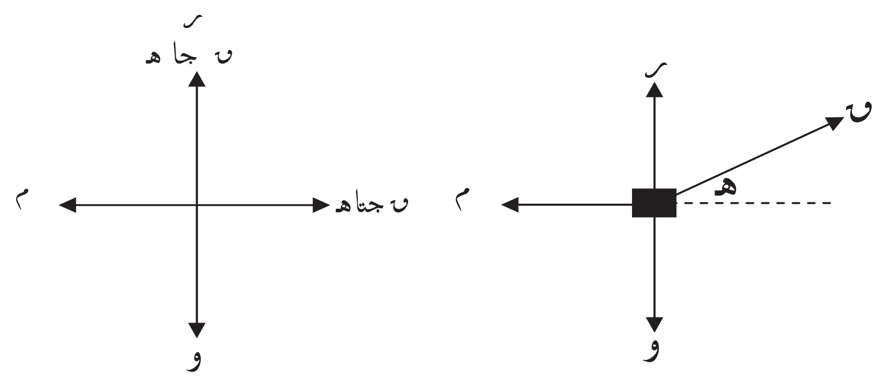
أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم (أ) .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة .

(٣) معادلة القوى المتزنة .

الحــل

(١)

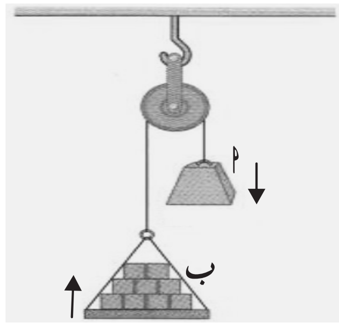


(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة الأفقية = **ق جتاهـ** − م

(٣) حيث أن الجسم لا يتحرك رأسياً فإن معادلة القوى المتزنة هى ر + **ق جاهـ** = و

مثال (4)

فى الشكل المقابل

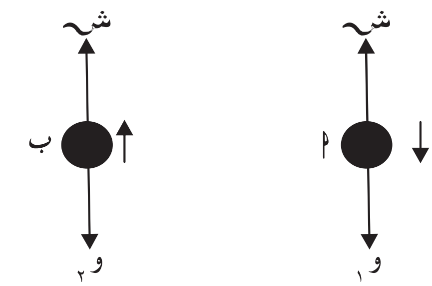


أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم (أ) و (ب) .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة لكل من الجسمين (أ) و (ب) .

الحـل

(١)

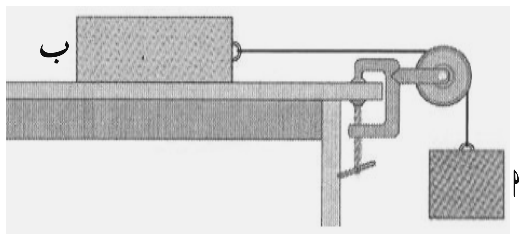


(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم (أ) = و$_{١}$ — ش

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم (ب) = ش — و$_{٢}$

مثال (5)

فى الشكل المقابل



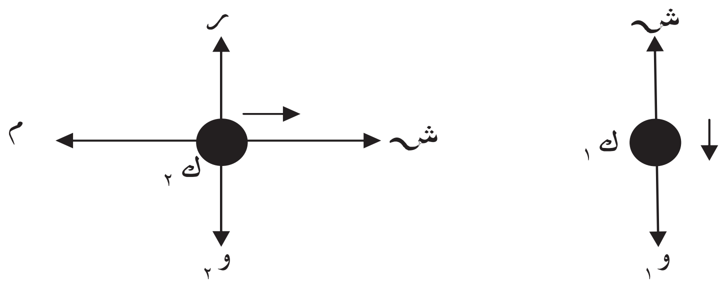
أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم (أ) و (ب) .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة لكل من الجسمين (أ) و (ب) .

(٣) معادلة القوى المتزنة .

الحـل

(١)



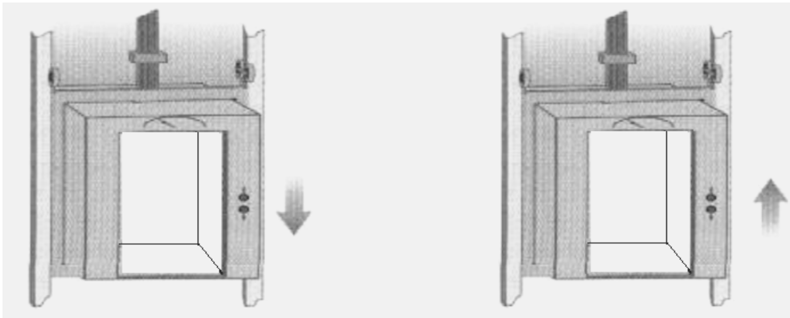
(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم (أ) = و$_1$ — ش

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم (ب) = ش — م

(٣) حيث أن الجسم (ب) لا يتحرك رأسياً فإن معادلة القوى المتزنة هى ر = و$_2$

مثال (6)

فى الشكل المقابل مصعد يتحرك رأسياً لأعلى ثم لأسفل

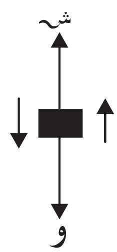


أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على المصعد أثناء الصعود و الهبوط .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة المؤثرة على المصعد أثناء الصعود و الهبوط

الحـل

(١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على المصعد أثناء الصعود والهبوط



(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة المؤثرة على المصعد أثناء الصعود

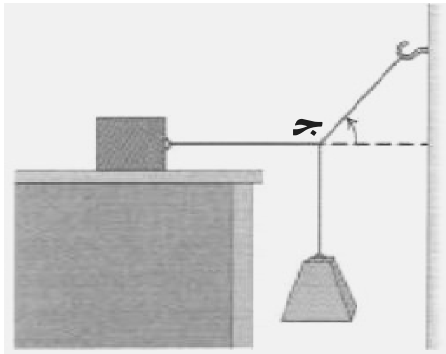
شـ — و

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة المؤثرة على المصعد أثناء الهبوط

و — شـ

مثال (7)

فى الشكل المقابل

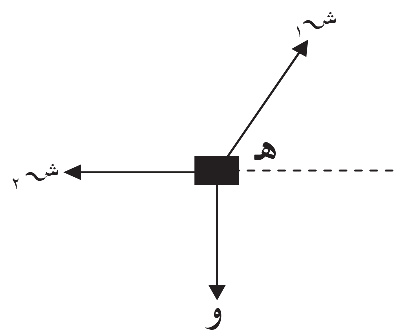


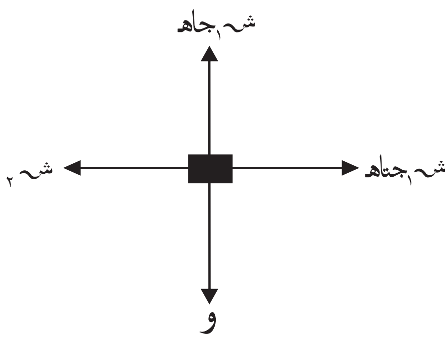
أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة عند نقطة (جـ) .

(٢) معادلات القوى المتزنة .

الحــل

(١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة عند نقطة (جـ)





(٢) معادلات القوى المتزنة

ش١ جتاهـ = ش٢ ، ش١ جاهـ = و

٢-٢ كمية الحركة (Momentum)

تنقسم كمية الحركة إلى كمية الحركة الخطية وكمية الحركة الزاوية

٢-٢-١ كمية الحركة الخطية (Linear Momentum)

إذا أثرت قوة على جسم ساكن فحركته بسرعة ما أو أثرت على جسم متحرك فغيرت سرعته فإنه يمكن تسمية ما يحدث بكمية الحركة

٢-٢-٢ تعريف كمية الحركة الخطيه

كمية الحركة الخطية هى كمية متجهه تنتج من حاصل ضرب كتلة الجسم القياسية ك وسرعتة المتجهه $\overleftarrow{\text{ع}}$ ويرمز لها بالرمز $\overleftarrow{\text{ك}}$ أى أن

كمية التحرك هي كمية متجهة اتجاهها هو نفس اتجاه السرعة ، ولذا يجب مراعاة إشارة السرعة عند حساب كمية التحرك.

$$\overleftarrow{\text{ك}} = \text{ك}\,\overleftarrow{\text{ع}}$$

بأخذ معيار الطرفين

$$\text{ك} = \text{ك}\,\text{ع}$$

٢-٢-٣ وحدة قياس كمية الحركة :

وحدة قياس كمية الحركة = وحدة كتلة × وحدة سرعة

جم . سم/ث ، كجم . م/ث

٢-٢-٤ معادلة أبعاد كمية الحركة :

ك ل ز $^{-1}$

مثال (8)

جسم كتلته ٣ كجم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ٥ م/ث ، أوجد كمية الحركة الخطية

الحــل

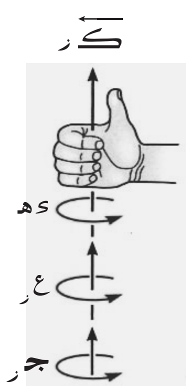
ڪ = ل ع

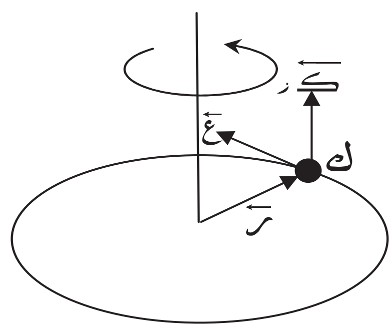
ڪ = ٣ × ٥ = ١٥ كجم . م/ث

٢-٣ كمية الحركة الزاوية (Angular Momentum)

كمية الحركة الزاوية هى كمية متجهة تنتج من حاصل الضرب الأتجاهى لمتجه الإزاحة في متجه الحركة الخطية .

كمية الحركة الزاوية لجسم كتلته ل يتحرك بسرعة ع⃖ بالنسبة لمحور يبعد عنه مسافة محدده بالمتجه ر⃖ مقاساً من محور الدوران إلى الجسم.





نعبر عن ذلك رياضيا بالعلاقة :

$$\vec{\text{ك}}_{\text{ر}} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ك}}$$

$$\vec{\text{ك}}_{\text{ر}} = \text{ك}\left(\vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ع}}\right)$$

$$\vec{\text{ك}}_{\text{ر}} = \left(\text{ك ر ع جا هـ}\right)\hat{\text{ي}} \quad ،$$

حيث $\hat{\text{ي}}$ متجه يحدد أتجاه كمية الحركة الزاوية وهو متجه عمودى على كل من $\vec{\text{ر}}$ ، $\vec{\text{ع}}$ ويأخذ أتجاه محور الدوران حسب قاعدة اليد اليمنى.

وبذلك فإن كمية الحركة الزاوية كمية متجهه مقدارها

$$\text{ك}_{\text{ر}} = \text{ك ر ع جا هـ}$$

مثال (9)

يتحدد موضع وسرعة جسم كتلته ٢ كجم بالمتجهين $\vec{\text{ر}} = ٣\,\hat{\text{س}} - ٤\,\hat{\text{ص}}$ تقاس بوحدة المتر ، $\vec{\text{ع}} = ٣٠\,\hat{\text{س}} + ٤٠\,\hat{\text{ص}}$ ، تقاس بوحدة م/ث . أوجد كمية الحركة الزاوية .

الحــل

$$\vec{\text{ك}}_{\text{ر}} = \vec{\text{ر}} \times \vec{\text{ك}}$$

$$\vec{\text{ك}}_{\text{ر}} = ٢\left(٣\,\hat{\text{س}} - ٤\,\hat{\text{ص}}\right) \times \left(٣٠\,\hat{\text{س}} + ٤٠\,\hat{\text{ص}}\right)$$

$$\vec{\text{ك}}_{\text{ر}} = ٢ \times \left[(٣ \times ٤٠) - (-٤ \times ٣٠)\right]\hat{\text{ع}}$$

$$\vec{\text{ك}}_{\text{ر}} = ٤٨٠\,\hat{\text{ع}}$$

أى أن كمية الحركة الزاوية مقدارها ٤٨٠ كجم .م^{٢}/ث وفى أتجاه متجه الوحدة $\hat{\text{ع}}$

٢-٤ العلاقة بين كمية الحركة الزاوية والسرعة الزاوية والقصور الذاتى للجسم

عندما يتحرك جسم فإنه يقاوم التغيير فى حركته سواء كانت خطيه أو دورانيه ونعلم أنه يقاوم قصور الدوران فى الحركة الدورانيه ويكتسب كمية حركة زاويه.

عندما يتحرك جسم كتلته ك فى دائرة نصف قطرها نق وسرعته الزاوية $ع_ز$ فإن

$$ك_ز = ك\,نق\,ع$$

وحيث أن السرعة الخطيه (ع) = $ع_ز$ نق فإن

$$ك_ز = ك\,نق^2\,ع_ز$$

و حيث أن عزم القصور الذاتى $(ع_ص) = ك\,نق^2$ ، فإننا نستنتج أن

$$ك_ز = ع_ص \times ع_ز$$

أى أن قيمة كمية الحركة الزاويه عبارة عن قصورالجسم الدورانى مضروباً فى سرعته الزاويه.

٢-٥ قوانين نيوتن للحركة (Newton's Laws of Motion)

قوانين نيوتن للحركة الثلاث هى الأساس الذى بُنيت عليه الميكانيكا الكلاسيكية ، وتربط هذه القوانين القوى المؤثرة على الجسم بحركته , وقد استُخدمت هذه القوانين في تفسير العديد من الأنظمة والظواهر الميكانيكية وهي كالتالى

٢-٥-١ قانون نيوتن الأول (Newton's First Law of Motion)

" يظل الجسم الساكن ساكناً و الجسم المتحرك بسرعة منتظمة متحركاً ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير من حالته "

مجـ $ق$ = صفر

٢-٥-٢ قانون نيوتن الثانى (Newton's Second Law of Motion)

" المعدل الزمنى للتغير فى كمية حركة الجسيم يتناسب مع محصلة القوى الخارجية المؤثرة عليه ويكون فى إتجاه القوة المحصلة "

والآن نفرض أن جسيم كتلته $ك$ يتحرك بسرعة $\overleftarrow{ع}$ تحت تأثير القوة $\overleftarrow{ق}$ التى تمثل محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسم فإن

$$ق \propto \frac{د}{دن} \overleftarrow{كـ}$$

$$ق \propto \frac{د}{دن} (ك \overleftarrow{ع})$$

$$\overleftarrow{ق} = م \frac{د}{دن} (ك \overleftarrow{ع})$$ حيث م ثابت التناسب

والكتلة لها حالتين قد تكون متغيرة أو ثابته

(أ) فى حالة الجسم الذى تتغير كتلته أثناء الحركة مثل الصواريخ فإن المعادلة السابقة يمكن صياغتها بالتفاضل لحاصل ضرب دالتين وتأخذ الصورة

$$\overleftarrow{ق} = م \left(ك \frac{د\overleftarrow{ع}}{دن} + \frac{دك}{دن} \overleftarrow{ع} \right)$$

$$\overleftarrow{ق} = م \left(ك \overleftarrow{جـ} + \frac{دك}{دن} \overleftarrow{ع} \right)$$

(ب) فى حالة أن يكون الجسم ثابت الكتلة أثناء الحركة فإن $\frac{دك}{دن}$ = صفر وعليه يأخذ قانون نيوتن الثانى الصورة البسيطة

$$ق = م\, ك\, \overleftarrow{جـ}$$

عند إختيار قوة مقدارها الوحدة بحيث إذا أثرت على جسيم كتلته الوحدة أكسبته عجلة مقدارها الوحده . فإن الثابت "م" يساوى الوحدة .

$$\overleftarrow{ق} = ك\, \overleftarrow{جـ}$$

٢-٥-٣ وحدات قياس القوة المطلقة (العلمية)

النيوتن : القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته واحد كجم أكسبته عجلة واحد م/ث^{٢}

الداين : القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته واحد جم أكسبته عجلة واحد سم/ث^{٢}

٢-٥-٤ وحدات قياس القوة التثاقلية (العملية)

ث كجم : القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته واحد كجم أكسبته عجلة ٩,٨ م/ث^{٢}

ث جم : القوة التى إذا أثرت على جسم كتلته واحد جم أكسبته عجلة ٩٨٠ سم/ث^{٢}

٢-٥-٥ معادلة أبعاد القوة :

$$\frac{ك\, ل}{ز^{٢}} = ك\, ل\, ز^{-٢}$$

٢-٥-٦ حفظ كمية الحركة الخطية (Conservation of Linear Momentum)

إذا تلاشت القوة $\overleftarrow{ق}$ المؤثرة على الجسم فأن

$$\overleftarrow{ق} = \frac{د}{دز}\left(ك\, \overleftarrow{ع}\right) = صفر$$

حيث أن تفاضل الثابت بصفر $\vec{ك ع}$ = ثابت

أى أنه إذا تلاشت القوة $\vec{ق}$ المؤثرة على الجسم فإن الجسم الساكن يظل فى هذه الحالة دائما. أما إذا بدأ الجسم حركته بسرعة إبتدائية ظل يتحرك بها دائما فى خط مستقيم وبانتظام و هذا هو القانون الأول لنيوتن أى أن القانون الأول لنيوتن هو نتيجة رياضية ناتجه عن القانون الثانى لنيوتن .

٢-٥-٧ القانون الثالث لنيوتن (Newton's Third Law of Motion)

" لكل فعل رد فعل مساوى له فى المقدار ومضاد فى الإتجاه وعلى خط عمل واحد "

وستقتصر الدراسة على الأجسام ثابتة الكتلة أثناء الحركة .

مثال (10)

يتحرك جسيم كتلته ٢ كجم بحيث أن متجه موضع الجسم عند اللحظة $ن$ هو

$$\vec{ر} = \left(\frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{ن^{٢}}{٢} + ١ \right) \vec{ي}$$ ، أوجد

القوة المؤثرة على الجسيم عند أى لحظة .

(ب) القوة المؤثرة على الجسيم عند $ن = ٣$ ثانية .

الحـل

(أ) نوجد أولا سرعة وعجلة الجسيم عند أى لحظة

$$\vec{ف} = \vec{ر} - \vec{ر}_{.} = \left(\frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{ن^{٢}}{٢} \right) \vec{ي}$$

$$ف = \frac{ن^{٣}}{٣} + \frac{ن^{٢}}{٢}$$

$$\frac{ءف}{ءن} = ن^{٢} + ن$$

$$ع = \frac{ءف}{ءن} = ن^{٢} + ن$$

$$جـ = \frac{ءع}{ءن} = ٢ن + ١$$

(ب) باستخدام معادلة الحركة نجد أن القوة المؤثرة على الجسيم عند أى لحظة تتعين من العلاقة

$$ق = ك\ جـ$$

عند $ن = ٣$ ثانية

فإن $ق = ٢(٢ \times ٣ + ١) = ١٤$ نيوتن

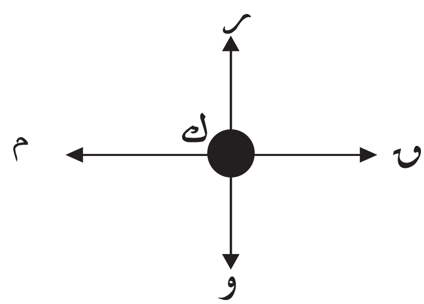
مثال (11)

سيارة كتلتها ٨٠٠ كجم تعانى من مقاومة ٣٠٠ نيوتن اوجد

قوة محرك السيارة حتى تكسبها عجلة (تسارع) ٣م/ث^{٢} ، رد فعل الأرض على السيارة .

الحــل

- نرسم المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على السيارة



- مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة الأفقية = ق − م

معادلة القوى المتزنة ر = و = ك د

- ∵ مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة الأفقية = ك × جـ

فإن ق − م = ك × جـ

ق − ٣٠٠ = ٨٠٠ × ٣

ق = ٢٤٠٠ + ٣٠٠ = ٢٧٠٠ نيوتن

∵ معادلة القوى المتزنة هى ر = و = ك د

فإن ر = و = ٨٠٠ × ٩,٨ = ٧٨٤٠ نيوتن

مثال (12)

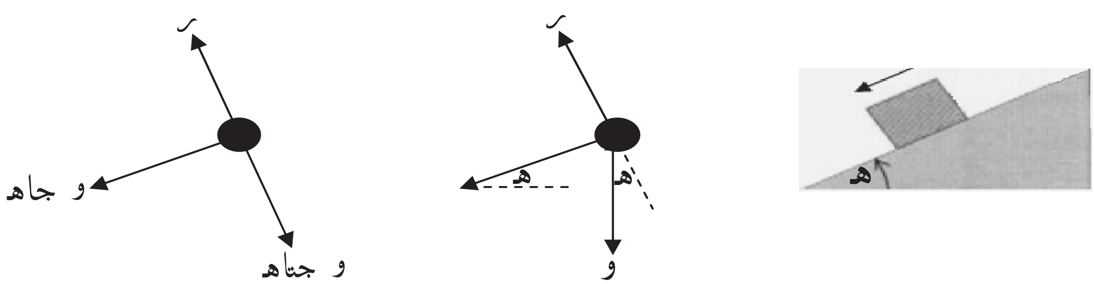
مستوى أملس مائل بزاوية ٣٠ درجة وضع على أعلى السطح جسم كتلته ٢ كجم فبدأ بالانزلاق

أوجد (١)عجلة (تسارع) انزلاق الجسم

(٢) قوة رد الفعل على الجسم

الحــل

- المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم



- مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم = و جاهـ = ك ء جاهـ

- معادلة القوى المتزنة ر = و جتاهـ

(١) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم = ك جـ

= ٢ × ٩,٨ × جا ٣٠ = ٢ جـ

جـ = ٤,٩ م/ث^٢

(٢) ∵ ر = و جتاهـ

∴ ر = ٢ جتا ٣٠ ≃ ١,٧٣ نيوتن

مثال (13)

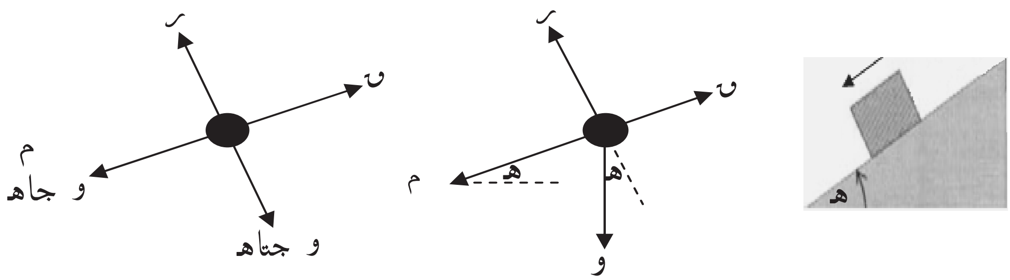
أثرت قوة مقدارها ٥٠ نيوتن على جسم كتلته ٤ كجم ساكن أسفل سطح خشن معامل احتكاكه ٠,٥ و فى أتجاه المستوى المائل فإذ كانت زاوية ميل السطح ٤٥ درجة

أوجد (١)عجلة (تسارع) انزلاق الجسم.

(٢) قوة رد الفعل على الجسم.

الحــل

- المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم



- مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم

ن – و جاهـ – م = ن – ك ء جاهـ – م

- معادلة القوى المتزنة ر = و جتاهـ

(١) ∵ ر = و جتاهـ

∴ ر = ٤ جتا٤٥ ≃ ٢,٨ نيوتن

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم = ك جـ

ن – ك ء جاهـ – م ر = ك جـ

٥٠ – ٤ × ٩,٨ × جا٤٥ – ٠,٥ × ٢,٨ = ٤ × جـ

$$٢٠,٩ = ٤ \times \text{جـ}$$

$$\text{جـ} = \frac{٢٠,٩}{٤} = ٥,٢٢٥ \text{ م/ث}^{٢}$$

مثال (14)

أثرت قوة على جسم فأكسبته عجلة ٦ م/ث^{٢} فإذا أثرت نفس القوة على جسم آخر كتلته ضعف كتلة الجسم الأول احسب عجلة الجسم الثاني ، واذكر ماذا تلاحظ ؟

الحـل

$$\text{ق} = \text{ك جـ}_{١}$$

$$\text{ق} = \text{ك} \times ٦$$

$$\text{ق} = ٢\text{ك جـ}_{٢}$$

$$\frac{\cancel{\text{ق}}}{\cancel{\text{ق}}} = \frac{\cancel{\text{ك}} \times ٦}{٢ \cancel{\text{ك}} \text{ جـ}_{٢}}$$

$$١ = \frac{٣}{\text{جـ}_{٢}}$$

$$\text{جـ}_{٢} = ٣ \text{ م/ث}^{٢}$$

نلاحظ أنه عندما تؤثر قوتان متساويتان على كتلتين الأولى ضعف الثانيه فإنهما يكتسبان عجله الأولى نصف الثانيه. أى أنه عند التأثير بقوة على كتله فإنه كلما زادت الكتله قلت العجلة التى تكتسبها.

مثال (15)

تعلق شخص كتلته ٦٠ كجم بواسطة خيط مثبت في سقف المصعد الذى يتحرك راسياً

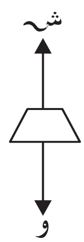
احسب:

(١) وزن هذا الشخص والمصعد ساكن .

(٢) قوة الشد في الخيط إذا تسارع المصعد لأعلى بمقدار ٢م/ث٢ .

(٣) قوة الشد في الخيط إذا تسارع المصعد لأسفل بمقدار ٢م/ث٢ .

الحــل



(١) و = ك ء

و = ٥٨٨ نيوتن

(٢) عندما يتحرك المصعد لأعلى فإن الجسم يتحرك لأعلى بعجلة **جـ١** ،

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم = **ك جـ١**

ش − ك ء = ك جـ١

ش − ٦٠×٩,٨ = ٦٠×٢

ش = ٦٠×٢ + ٦٠×٩,٨ = ٧٠٨ نيوتن

(٣) عندما يتحرك المصعد لأسفل فإن الجسم يتحرك لأسفل بعجلة **جـ٢**

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم = **ك جـ٢**

و − ش = ك جـ٢

$ش = و - ك ج_٢$

$ش = ك د - ك ج_٢$

$ش = ٦٠ \times ٩,٨ - ٦٠ \times ٢ = ٤٧٤$ نيوتن

مثال (16)

تعلق شخص بواسطة خيط مثبت في سقف المصعد الذى يتحرك راسياً

احسب:

(١) مقدار واتجاه التسارع حتى ينعدم الشد في الخيط .

(٢) كيف يشعر هذا الشخص بزيادة أو نقصان أو أنعدام وزنه ؟

الحـل

(١) مقدار واتجاه التسارع حتى ينعدم الشد في الخيط (ينعدم وزن الجسم)

$و = ك ج$

$ك د = ك ج$

$د = ج$

ينعدم وزن الجسم الظاهرى عندما تتساوى عجلة حركته مع عجلة الجاذبية الأرضيه أى أنه سينعدم وزن الجسم الظاهرى عندما ينقطع حبل المصعد ويتحرك بعجلة الجاذبية الأرضية لأسفل

(٢)

- يشعر هذا الشخص بزيادة وزنه عندما يتحرك المصعد لأعلى
- يشعر هذا الشخص بنقصان وزنه عندما يتحرك المصعد لسفل

يشعر هذا الشخص بأنعدام وزنه عندما يتحرك المصعد لأسفل بعجلة مساوية لعجلة الجاذبية الأرضية .

٢-٦ قوانين نيوتن في التحريك الدورانى (Newton's law of rotational motion)

٢-٦-١ قانون نيوتن الأول فى التحريك الدورانى

(Newton's First law of rotational motion)

" الجسم الساكن يبقى ساكن والجسم الذي يدور يبقى يدور ما لم يؤثر علية عزم خارجى "

يبقى الجسم على حالته التحركيه الدورانية بسرعة زاوية ثابته بالنسبة لمحور ما إذا كانت محصلة العزوم بالنسبة لذلك المحور مساوية للصفر . ويدل هذا القانون على وجود قصور ذاتي دوراني أي إن الجسم يعجز عن تغيير حالتة بنفسه دون وجود مؤثر خارجى ، وعزم القصور الذاتي يشبة قوة الاحتكاك من حيث التأثير وعلية كلما قل عزم القصور الذاتي للجسم زادت سرعتة الزاوية واذا زاد عزم القصور قلت السرعة الزاوية أى أنه إذا كانت محصلة العزوم المؤثرة على جسم مساوية للصفر فسيبقى على حالته التحركية الدورانية ، أى تبقى سرعته الزاوية ثابتة دوماً أو لا يدور نهائياً .

٢-٦-٢ قانون نيوتن الثانى فى التحرك الدورانى

(Newton's Secondlaw of rotational motion)

" إذا أثرت محصلة عزوم خارجية على جسم قابل للدوران حول محورة وأكسبتة تعجيلاً زاويا فأن هذا التعجيل يتناسب طرديا مع محصلة العزوم المؤثرة ويكون بأتجاهها وعكسيا مع عزم القصور الذاتي للجسم "

ومن المعروف أن التعجيل الزاوى والعزم المؤثر كميتان متجهتان لهما نفس الاتجاة حسب قاعدة اليد اليمنى . وإذا كانت محصلة العزوم لا تساوى الصفر فستتغير السرعة الزاوية ويكتسب الجسم عجلة (تسارع) زاويه .

$جـ_ر \propto$ محصلة العزوم

$$جـ_ر \propto \frac{1}{ع_ص}$$

من العلاقتين السابقتين ينتج أن $جـ_ر \propto \frac{1}{ع_ص} \times$ محصلة العزوم

$\therefore جـ_ر = \frac{م}{ع_ص} \times$ محصلة العزوم ، حيث م ثابت التناسب

بأختيار وحدات قياس للكميات الموجوده فى المعادله السابقه تؤدى أن تكون م=١ فإن

$\therefore جـ_ر = \frac{1}{ع_ص} \times$ محصلة العزوم

فإن محصلة العزوم $= ع_ص \; جـ_ر$

ومن المعروف أن $جـ_ر = \frac{ءع_ر}{ءن}$

فيكون محصلة العزوم $= ع_ص \frac{ءع_ر}{ءن}$

بفرض ثبات عزم القصور الذاتى لجسم يتحرك حول محور ثابت

محصلة العزوم$= \frac{ء ع_ص ع_ر}{ءن}$

$\therefore ك_ر = ع_ص ع_ر$

فإن محصلة العزوم$= \frac{ءك_ر}{ءن}$

وهذا يمثل الشكل العام لقانون التحريك الدورانى ومعناه محصلة العزوم المؤثرة على جسم بالنسبة لمحور ما يساوى معدل تغير كمية حركته الزاوية حول ذلك المحور بالنسبة للزمن.

٢-٦-٣ القانون نيوتن الثالث فى التحرك الدورانى

" لكل عزم عزم مضاد يساوية بالمقدار ويعاكسة بالاتجاه ويقع وإياه على خط فعل واحد ".

٢-٧ مبدأ حفظ كمية الحركة الزاوية (Conservation of linear momentum)

إذا كان محصلة العزوم المؤثرة على الجسم تساوى صفر (تتلاشى) فإن كمية الحركة الخطية ثابتة لا تتغير

محصلة العزوم = $\frac{\text{د}\,\text{ك}_{\text{ر}}}{\text{د}\,\text{ن}}$ = صفر

∴ $\text{ك}_{\text{ر}}$ = ثابت

$\text{ع}_{\text{ص}}\ \text{ع}_{\text{ر}}$ = ثابت

وبذلك إذا استطعنا تقليل القصور الذاتى لأقصى قيمه ممكنه فإن السرعة الزاوية ستكون أكبر ما يمكن و العكس .

ويتضح ذلك من حركة الغطاس الذى يشكل جسده فيكون دائرياً عند سقوطه لسطح الماء فيقل قصوره الذاتى وتزداد سرعته الزاوية وعند ملامسة الماء يفرد جسده فيزداد القصور الذاتى وتقل السرعة الزاوية ليهبط فى الماء .

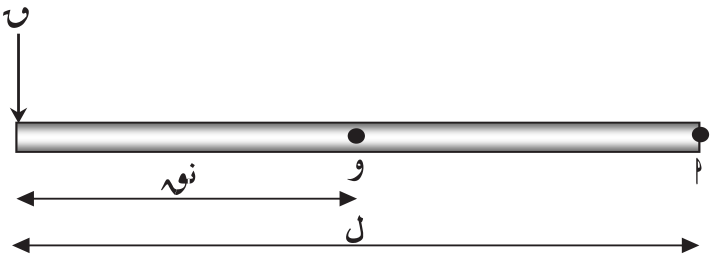
مثال (17)

مسطرة طولها ١ متر و كتلتها ٠,٢ كجم مثبته فى مستواها عند نقطة وتؤثر عليها قوة ٥ نيوتن عمودية عليها وفى نفس المستوى ، أوجد

(١) عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران المار بنقطة التثبيت عند مركز ثقلها أوعند طرفها

(٢) ما هى العجلة الزاوية للمسطرة حول نقطة التثبيت

الحـل



(١)

- عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران المار بمركز المسطرة (م)= **ق نق جاهـ**

$= ٥ \times ٠,٥ \times$ جا ٩٠° = ٢,٥ نيوتن . م

- عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران المار بطرف المسطرة (م)= **ق ل جاهـ**

$= ٥ \times ١ \times$ جا ٩٠° = ٢,٥ نيوتن . م

(٢)

- إذا كان الدوران حول محور يمر من بمركز الثقل "و" .

∵ عزم القصور الذاتى ($ع_{ص}$) $= \frac{١}{١٢}$ ك ل^{٢} $= \frac{١}{١٢} \times ٠,٣ \times (١)^{٢} = ٠,٠٢٥$ كجم . م^{٢}

استناداً قانون نيوتن الثانى الدورانى فإن

محصلة العزوم الدوران = $ع_{ص}$ $جـ_{ر}$

م = $ع_{ص}$ $جـ_{ر}$

∴ $جـ_{ر} = \frac{م}{ع_{ص}}$

∴ $جـ_{ر} = \frac{٢,٥}{٠,٠٢٥} = ١٠٠$ زاوية نصف قطرية / ث^{٢}

- إذا كان الدوران حول محور يمر بنقطة عند الطرف "أ"

$\because$ عزم القصور الذاتى $(ع_{ص}) = \frac{١}{٣} ك ل^{٢} = \frac{١}{٣} \times ٠,٣ \times (١)^{٢} = ٠,١$ كجم . م^{٢}

$\therefore جـ_{ز} = \frac{ع_{د}}{ع_{ص}}$

$\therefore جـ_{ز} = \frac{٥}{٠,١} = ٥٠$ زاوية نصف قطرية / ث^{٢}

مثال (18)

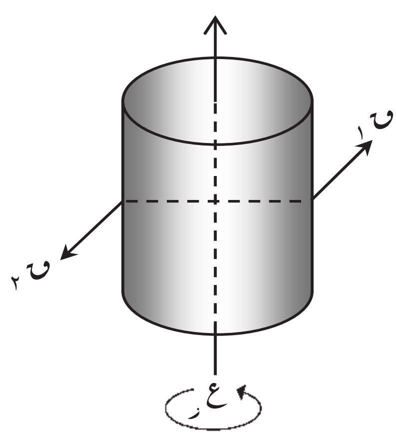
أسطوانة دائرية قائمة كتلتها ١٠ كجم و نصف قطرها ٠,٢ متر تتحرك من السكون تحت تأثير القوتين ٥ ، ٧ نيوتن ،واللتان تؤثران عند طرفى قطر فيها وعموديتان عليه وتعملا على دوران الأسطوانة عكس عقارب الساعة ، احسب

(١) عزم القوى بالنسبة لمحور الدوران

(٢) العجلة الزاوية للدوران .

(٣) السرعة الزاوية بعد ثانيتين من الحركة .

الحـل



(١) $\because$ عزم القوى بالنسبة لمحور الدوران المار $=$ ق$_١$ نق جاهـ + ق$_٢$ نق جاهـ

م $=$ ٥ $\times$ ٠,٣ $\times$ جا ٩٠° + ٧ $\times$ ٠,٣ $\times$ جا ٩٠° $=$ ٣,٦ نيوتن . م

(٢) عزم القصور الذاتى حول محور الدوران

$$(ع_{ص}) = ك \frac{نق^{٢}}{٢} = ١٠ \times \frac{(٠,٢)^{٢}}{٢} = ١٠ \times ٠,٠٢ = ٠,٢ \text{ كجم . م}^{٢}$$

استناداً قانون نيوتن الثانى الدورانى فإن

محصلة العزوم الدوران "م" $=$ ع$_{ص}$ جـ$_{ر}$

$$\therefore جـ_{ر} = \frac{م}{ع_{ص}}$$

$$\therefore جـ_{ر} = \frac{٣,٦}{٠,٢} = ١٨ \text{ زاوية نصف قطرية / ث}^{٢}$$

(٣) $\because$ ع$_{ر}$ $=$ ع$_{ر.}$ + جـ$_{ر}$ ن

$\therefore$ ع$_{ر}$ $=$ ٠ + ١٨ $\times$ ٢ $=$ ٣٦ زاوية نصف قطرية / ث

تمارين (٢)

(١) جسم كتلته ٥ كجم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ٩ م/ث ، أوجد كمية الحركة الخطية

(٢) يتحدد موضع وسرعة جسم كتلته ٣ كجم بالمتجهين $\overleftarrow{ر} = \hat{س} + ٨\,\hat{ص}$ تقاس بوحدة

المتر ، $\overleftarrow{ع} = ٢٠\,\hat{س} + ١٠\,\hat{ص}$ ، تقاس بوحدة م/ث . أوجد كمية الحركة الزاوية .

(٣) يتحرك جسيم كتلته ٥ كجم بحيث أن متجه موضع الجسم عند اللحظة $ن$ هو

$\overleftarrow{ر} = \left(\frac{ن^{٤}}{٤} + \frac{ن^{٣}}{٣} + ٢\right)\overleftarrow{ى}$ ، أوجد

(أ) القوة المؤثرة على الجسيم عند أى لحظة .

(ب) القوة المؤثرة على الجسيم عند $ن = ٢$ ثانية .

(٤) سيارة كتلتها ١٥٠٠ كجم تعانى من مقاومة ١٥٠ نيوتن اوجد

(١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على السيارة .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة ، معادلة القوى المتزنة .

(٣) قوة محرك السيارة حتى تكسبها عجلة (تسارع) ٦ م/$ث^{٢}$ ، رد فعل الأرض على السيارة .

(٥) مستوى أملس مائل بزاوية ٦٠ درجة وضع على أعلى السطح جسم كتلته ٤ كجم فبدأ بالانزلاق

أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم .

(٣) معادلة القوى المتزنة .

(٤)عجلة (تسارع) انزلاق الجسم

(٥) قوة رد الفعل على الجسم

(٦) أثرت قوة مقدارها ٨٠ نيوتن على جسم كتلته ٢ كجم ساكن أسفل سطح خشن معامل احتكاكه ٠,٦ و فى أتجاه المستوى المائل فإذ كانت زاوية ميل السطح ٣٠ درجة

أوجد (١) المخطط الذى يحدد مركبات القوى المؤثرة على الجسم .

(٢) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة للجسم .

(٣) معادلة القوى المتزنة .

(٤)عجلة (تسارع) انزلاق الجسم

(٥) قوة رد الفعل على الجسم

(٧) أثرت قوة على جسم فأكسبته تسارع ٣ م/ث^{٢} فإذا أثرت نفس القوة على جسم آخر كتلته ضعف كتلة الجسم الأول احسب تسارع الجسم الثاني ، واذكر ماذا تلاحظ ؟

(٨) تعلق شخص كتلته ٨٠ كجم بواسطة خيط مثبت في سقف المصعد الذى يتحرك راسياً

احسب:

(١) وزن هذا الشخص والمصعد ساكن .

(٢) قوة الشد في الخيط إذا تسارع المصعد لأعلى بمقدار ٢م/ث^{٢} .

(٣) قوة الشد في الخيط إذا تسارع المصعد لأسفل بمقدار ٢م/ث^{٢} .

(٤) مقدار واتجاه التسارع حتى ينعدم الشد في الخيط .

(٥) كيف يشعر هذا الشخص بزيادة أو نقصان أو أنعدام وزنه ؟

(٩) مسطرة طولها ٢ متر و كتلتها ٠,٥ كجم مثبته فى مستواها عند نقطة وتؤثر عليها قوة ٢٤ نيوتن عمودية عليها وفى نفس المستوى ، أوجد

(١)عزم القوة بالنسبة لمحور الدوران المار بنقطة التثبيت عند مركز ثقلها أوعند طرفها

(٢) ما هى العجلة الزاوية للمسطرة حول نقطة التثبيت

(١٠) أسطوانة دائرية قائمة كتلتها ٥ كجم و نصف قطرها ٠,٤ متر تتحرك من السكون تحت تأثير القوتين ٦ ، ١٠ نيوتن ،واللتان تؤثران عند طرفى قطر فيها وعموديتان عليه وتعملا على دوران الأسطوانة عكس عقارب الساعة ، احسب

(١) عزم القوى بالنسبة لمحور الدوران

(٢) العجلة الزاوية للدوران .

(٣) السرعة الزاوية بعد ثانيتين من الحركة .

الوحدة الثالثة

الشغل

٣-١ أولاً: الشغل المبذول بواسطة قوة ثابته

٣-٢ الشغل والقوى المحافظة والقوى غير المحافظة

٣-٣ ثانياً : الشغل المبذول تحت تأثير قوة متغيرة

٣-٤ الشغل المبذول فى الدوران

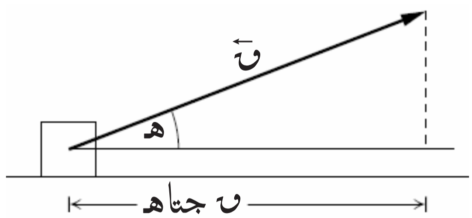
مقدمه :

الشّغل الميكانيكي هو أحد أشكال أنتقال الطاقة ، فالشغل والطاقة مصطلحان متداخلان , فالطاقة تُنتج شغلاً كما أنها تنشأ عن الشغل .
ومن أمثلة ذلك الأجسام المرنة مثل النابض وخيط المطاط تختزن طاقة عند بذل شغل عليها , تسمى طاقة كامنة بسبب تغير طرأ على شكلها .

٣- الشغل (Work)

٣-١ أولاً: الشغل المبذول بواسطة قوة ثابته

الشغل المبذول تحت تأثير قوة ثابته وفى إتجاه يصنع زاوية ثابته مع إتجاه الإزاحة حيث أن مسار الحركة عبارة عن خط مستقيم



$$ش = |\overleftarrow{ق}| جتاهـ \times |\overleftarrow{ف}|$$

$$ش = ق \; ف \; جتاهـ$$

مما سبق نستنتج أن الشغل هو حاصل الضرب القياسى لمتجه القوة ومتجه الإزاحة

$$ش = \overleftarrow{ق} . \overleftarrow{ف}$$

٣-١-١ تعريف الشغل

- **هو كمية قياسية عبارة عن حاصل ضرب قيمة الإزاحة فى قيمة مركبة القوة فى اتجاه الإزاحة .**
- **هو كمية قياسية عبارة عن حاصل ضرب قيمة القوة فى قيمة مركبة الإزاحة فى اتجاه القوة .**

٣-١-٢ حالات خاصة لقيمة الزاوية المحصورة بين متجه القوة ومتجه الإزاحة

- **هـ = ٠°** ، متجه الإزاحة والقوة لها نفس الإتجاه .
- **هـ = ١٨٠°** ، متجه الإزاحة والقوة متضادان فى الإتجاه .
- **هـ = ٩٠°** ، متجه الإزاحة والقوة متعامدان .

على ذلك فإن الشغل كمية موجبة تعنى أن اتجاه القوة هو نفس اتجاه الإزاحة ويكون كمية سالبة إذا كانت القوة مضاد لإتجاه الإزاحة

٣-١-٣ وحدات قياس الشغل

وحدات قياس الشغل = وحدات قوة × وحدات مسافة

(أ) وحدات علمية

- إرج (داين . سم) ، جول (نيوتن . متر)
- الجول = ١٠ ^{٧} أرج

(ب) وحدات عملية

ث جم . سم ، ث كجم . متر ، ث طن . كم

الكميه	القوة	المسافة	الشغل
الوحدة	نيوتن	متر	جول
	داين	سم	أرج
	ث كجم	متر	ث كجم . متر
	ث جم	سم	ث جم . سم

٣-١-٤ معادلة أبعاد الشغل

∵ [ق] = ك ل ز$^{-2}$

∵ [ف] = ل

∵ النسب المثلثية ليس لها أبعاد ، فإن جتاهـ ليس لها أبعاد

∴ [ش] = [ق ف جتاهـ] = ك ل ز$^{-2}$ × ل = ك ل^{2} ز$^{-2}$

٣-٢ الشغل والقوى المحافظة والقوى غير المحافظة

القوة المحافظه

- هي القوة التي يكون شغلها لا يعتمد على المسار بين نقطتين بل يعتمد فقط علي الوضع الابتدائي والوضع النهائي للجسم (مثل قوة الوزن وقوة الأرجاع للياى) ولا يحدث تغير فى طاقتها).
- الشغل المبذول بواسطة القوى المحافظة على جسم تساوى صفر عندما يتحرك الجسم فى مسار مغلق عائداً لنقطة البداية .

القوة غير المحافظة

- هي القوة التي يكون شغلها يعتمد على المسار بين نقطتين مثل قوة الأحتكاك.
- وهى تلك القوى التى يؤثر فيها الأحتكاك ويحدث هدر للطاقه وبالتالى يمكننا تعريف قوة الأحتكاك بأنها قوة غير محافظه.
- الشغل الكلي المبذول من قوة غير محافظة لتحريك جسم في مسار مغلق لا يساوي صفر.

مثال (1)

إذا كانت الازاحة والقوة هما

$\overleftarrow{\text{ف}} = ٢\hat{\text{س}} + ٣\hat{\text{ص}}$ متر، $\overleftarrow{\text{ق}} = ٥\hat{\text{س}} + ٢\hat{\text{ص}}$ نيوتن ، احسب

(١) مقدار كل من الازاحة والقوة

(٢) الشغل الناتج

الحـل

(١) $\left|\overleftarrow{\text{ف}}\right| = \sqrt{\text{ف}_{\text{س}}^{٢} + \text{ف}_{\text{ص}}^{٢}} = \sqrt{٢^{٢} + ٣^{٢}} = ٣,٦$

$\left|\overleftarrow{\text{ق}}\right| = \sqrt{\text{ق}_{\text{س}}^{٢} + \text{ق}_{\text{ص}}^{٢}} = \sqrt{٥^{٢} + ٢^{٢}} = ٥,٤$

(٢) $\text{ش} = \overleftarrow{\text{ق}} . \overleftarrow{\text{ف}}$

$\text{ش} = \left(٢\hat{\text{س}} + ٣\hat{\text{ص}}\right).\left(٥\hat{\text{س}} + ٢\hat{\text{ص}}\right) = ٢\times٥ + ٣\times٢ = ١٦$ جول

مثال (2)

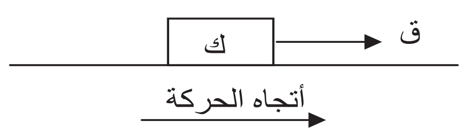
يتحريك جسم على مستوى أفقى أملس تحت تأثير قوة أفقية مقدارها ٤٠ ث كجم مسافة ٥٠ مترا

أوجد

(١) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة .

(٢) الشغل الذى تبذله القوى فى إتجاه الحركة .

الحـل



(١) القوى فى اتجاه الحركة $(\text{ق}) = \text{ق}$

(٢) الشغل المبذول $= \text{ق} \times \text{ف}$

$= ٤٠ \times ٥٠ = ٢٠٠٠$ ث كجم . متر

مثال (3)

جسم يتحرك تحت تأثير قوة أفقية مقدارها ٤٠ ث كجم موضوع على مستوى أفقى خشن مقاومتة للحركة ١٠ ث كجم فتحرك مسافة ٥٠ مترا .

(١) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة

(٢) الشغل الذى تبذله القوى فى إتجاه الحركة

الحــل

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة (ق) = ق − م

$= ٤٠ - ١٠ = ٣٠$ ث كجم

الشغل المبذول = ق × ف

$= ٣٠ \times ٥٠ = ١٥٠٠$ ث كجم.م

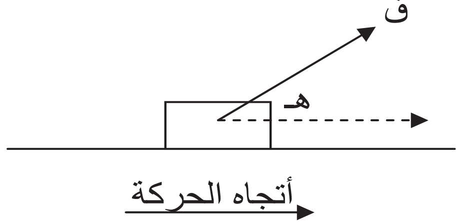
مثال (4)

أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك جسم على مستوى أفقى أملس بتأثير قوة مقدارها ٢٠٠ ث كجم ، إذا تحرك الجسم مسافة ١٠ أمتار و كانت القوة تميل على المستوى الأفقى بزاوية مقدارها ٦٠° .

(١) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة

(٢) الشغل الذى تبذله القوى فى إتجاه الحركة

الحــل



ں = ٢٠٠ × ٩,٨ = ١٩٦٠ نيوتن

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة (و) = ں جتاهـ

= ١٩٦٠ جتا ٦٠ = ٩٨٠ نيوتن

الشغل المبذول = و × ف

= ٩٨٠ × ١٠ = ٩٨٠٠ جول

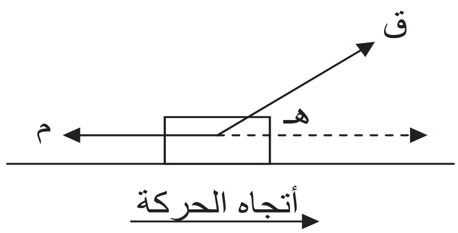
مثال (5)

يتحرك جسم موضوع على مستوى أفقى خشن تحت تأثير قوة مقدارها ١٠٠ ث جم و تميل على الأفقى بزاوية ٦٠° ويلاقى الجسم مقاومة احتكاك مع المستوى مقدارها ٣٠ ث جم مسافة ٢٠ سم

(١) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة

(٢) الشغل الذى تبذله القوى فى إتجاه الحركة

الحـل



ں = ١٠٠ × ٩٨٠ = ٩٨٠٠٠ داين

ں = ٣٠ × ٩٨٠ = ٢٩٤٠٠ داين

مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة (و) = ں جتاهـ – م

= ٩٨٠٠٠ جتا ٦٠ – ٢٩٤٠٠ = ١٩٦٠٠ داين

الشغل المبذول = و × ف

= ١٩٦٠٠ × ٢٠ = ٣٩٢٠٠٠ أرج

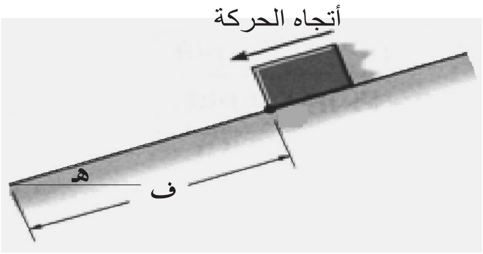
مثال (6)

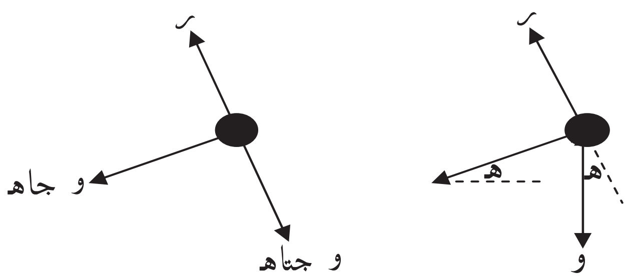
ينزلق جسم وزنه ٢٠ ث كجم موضوعا على مستوى مائل أملس ، يميل على المستوى الأفقى بزاوية قدرها ٣٠ مسافة ٥ أمتار .

(١) مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة

(٢) الشغل الذى تبذله القوى فى إتجاه الحركة

الحــل





مجموع مركبات القوى فى اتجاه الحركة (ق) = ن جاهـ

= ٢٠ جا٣٠ = ١٠ ث كجم

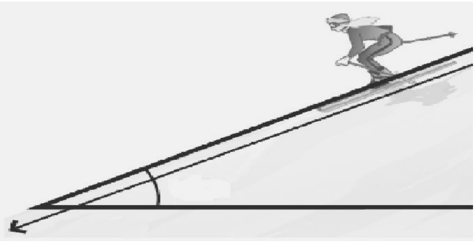
الشغل المبذول = ق × ف

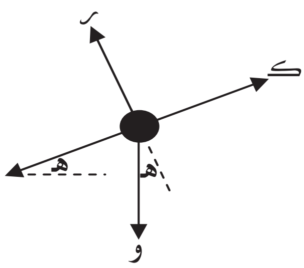
= ١٠ × ٥ = ٥٠ ث كجم.م

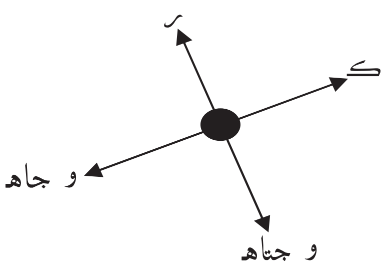
مثال (7)

يتحرك شخص وزنه ٦٠ ث كجم بواسطة زلاجه لأسفل على مستوى خشن مائل على الأفقى بزاوية٣٠° ، فإذا تحرك الشخص بتأثير وزنه ١٢٠ متراً ، فأوجد قيمة الشغل المبذول ، علما بأن الإحتكاك بين الزلاجه و المستوى ٨ ث كجم ، احسب الشغل المبذول و كذلك الشغل المفقود نتيجة الأحتكاك بين المستوى و الجسم .

الحل







الشغل المبذول = (٦٠ × جا ٣٠ – ٨) × ١٢٠

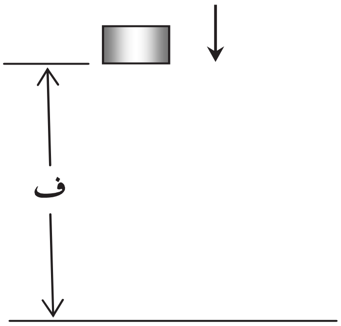
= ٢٦٤٠ ث كجم . متر

الشغل المفقود = ٨ × ١٢٠ = ٩٦٠ ث كجم . متر

مثال (8)

جسم كتلته ٥٠ كجم يسقط من أرتفاع ٢٠ متراً عن سطح الأرض ، أحسب الشغل المبذول بالجول حتى يصل الجسم إلى سطح الأرض .

الحل



الكتلة = ٥٠ كجم

الوزن = ٥٠ ث كجم

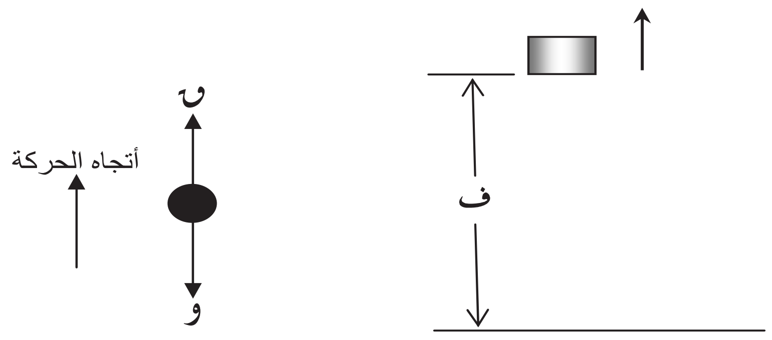
الوزن = ٥٠ × ٩,٨ نيوتن = ٤٩ نيوتن

الشغل = و × ف = ٤٩ × ٢٠ = ٩٨٠ جول

مثال (9)

ما هو الشغل المبذول لرفع جسم كتلته ٢٠ كجم مسافة ٣ أمتار بتأثير قوة مقدارها ٥٠٠ نيوتن.

الحــل



الكتلة = ٢٠ كجم

الوزن = ٢٠ ث كجم

الوزن = ٢٠ × ٩,٨ نيوتن = ١٩٦ نيوتن

الشغل = (ق – و) × ف

الشغل = (٥٠٠ – ١٩٦) × ٣

= ٩١٢ جول

مثال (10)

لربط صامولة تؤثر بقوة مقدارها ٥ ث كجم على مسافة ٢٠ سم من محور الصامولة ، فإذا دار المفتاح ٢١ لفه لإتمام عملية الربط ، فما هو الشغل المبذول لربط الصامولة .

الحل

نق = ٢٠ سم = ٠,٢ متر

الشغل المبذول أثناء لفة واحده = محيط دائرة الدوران × القوة

الشغل = ٢ط نق × ق

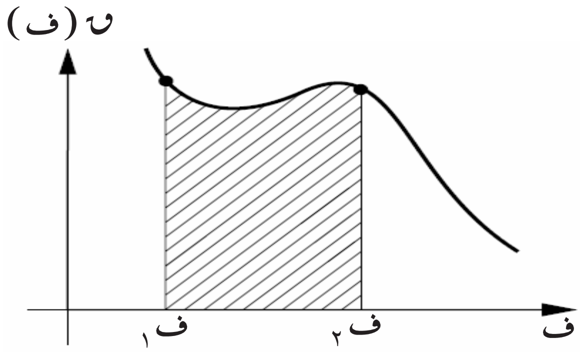
الشغل = $٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٠,٢ \times ٢١ = ٢٦,٤$ ث كجم . متر

الشغل المبذول أثناء خمس لفات = الشغل المبذول أثناء لفة واحدة × عدد اللفات

$= ٢٦,٤ \times ٥ = ١٣٢$ ث كجم . متر

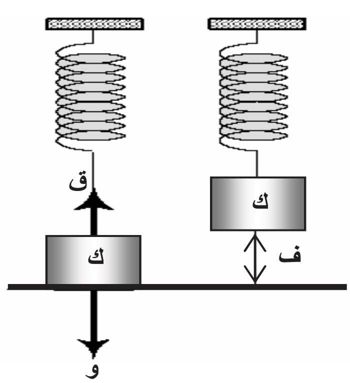
٣-٣ ثانياً : الشغل المبذول تحت تأثير قوة متغيرة

تغير القوة المؤثرة بالنسبة للإزاحة يعنى أن المسار ينحرف عن خط مستقيم ويحسب الشغل على أنه المساحة تحت المنحنى الذى يمثل العلاقة بين القوة المؤثرة على الجسم والإزاحة التى يقطعها الجسم



$$ش = \int_{ف_١}^{ف_٢} ق(ف)\, ءف$$

من الأمثلة الشائعه للشغل المبذول بواسطة قوة متغيرة هو الشعل المبذول بواسطة قوة شد أو ضغط متغيرة مؤثرة على ياى و يعتبر الياى تطبيقاً عملياً على قوة متغيرة مع الإزاحة



وعندما يُعلق ثقل في الياى فإنه يستطيل وقد وجد العالم هوك أن قوة شـد الياى تزداد بزيادة الإزاحة الحاصلة له وعلى هذا فإن القوة المؤثرة (ق)على الياى تتناسب طردياً مع الإزاحه (ف)

$$ق \propto ف$$

$$ق = ث ف$$

حيث (ث) ثابت التناسب ويسمي بمعامل الصلابة .

وبسبب أن اليای معلق رأسياً فإنه يتزن تحت تأثير القوة المؤثرة (ق) و قوة الوزن (و)

$$ق = و$$

$$ث ف = ك د$$

حيث د عجلة الجاذبية الأرضيه ، د = ٩,٨ م/ث^{٢} = ٩٨٠ سم / ث^{٢}

$$\therefore ث = \frac{ك د}{ف}$$

<u>وحدة معامل الصلابه :</u>

وحدة قوة / وحدة مسافة

نيوتن / م ، داين / سم ، ث كجم / م ، ث جم / سم

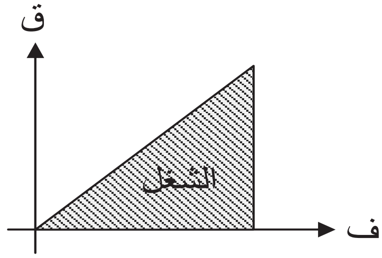
وبذلك نستطيع أن نستنتج الشغل المبذول تحت تأثير قوة متغيرة كالآتى

$$ش = \int_{٠}^{ف} ق \, دف$$

$$ش = \int_{٠}^{ف} ث ف \, دف$$

$$ش = \frac{١}{٢} ث ف^{٢}$$

ويمكن برهنة العلاقة السابقة بطريقة أخرى حيث يمثل الشغل الذى تبذله قوة الأرجاع للياى عندما ينتقل الجسم المربوط به مسافة "ف" عن وضع الأتزان بحساب المساحة تحت المنحنى (مساحة المثلث) .



$$ش = \frac{١}{٢} ف \times ق$$

$$ش = \frac{١}{٢} ف \times ث\, ف$$

$$ش = \frac{١}{٢} ث\, ف^{٢}$$

مثال (11)

ياى ثابت صلابته ١٠٠ نيوتن / متر علقت عليه كتله فأزيح عن موضع اتزانه مسافة ٢٠ سم ، احسب الشغل المبذول على الياى .

الحـل

ف = ٢٠ سم = ٠,٢ متر

$$ش = \frac{١}{٢} ث\, ف^{٢}$$

$$ش = \frac{١}{٢} \times ١٠٠ \times (٠,٢)^{٢} = ٢ \text{ جول}$$

مثال (12)

ياى ثابت علقت عليه كتله ٢ كجم فأزيح عن موضع اتزانه مسافة ٠,١ متر ، احسب الشغل المبذول على الياى .

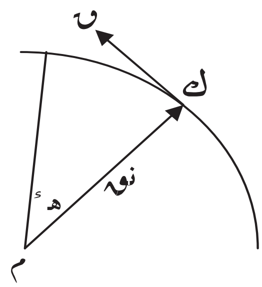
الحــل

$$ث = \frac{٢ \times ٩,٨}{٠,١} = ١٩٦ \text{ نيوتن / متر}$$

$$ش = \frac{١}{٢} ث ف^{٢}$$

$$ش = \frac{١}{٢} \times ١٩٦ \times (٠,١)^{٢} = ٠,٩٨ \text{ جول}$$

٤-٣ الشغل المبذول فى الدوران



جسيم كتلته ك يتحرك فى مسار دائرى نصف قطره نق تحت تأثير عزم القوة ق حول محور مار بالمركز "م" وعمودى على سطح الورقه. ولحساب الشغل عندما يدور الجسم زاويه "هـ" قاطعاً خلال ذلك مسافه خطيه "ل" على المسار الدائرى

الشغل = ق ل

الشغل = ق نق هـ

الشغل = العزم × هـ

ش = م هـ

مثال (13)

جسيم يتحرك فى مسار دائرى نصف قطره ١,٥ متر تحت تأثير قوة ١٠ نيوتن حول محور، أحسب الشغل عندما يدور الجسم زاويه ١,٨ زاويه نصف قطريه.

الحــل

الشغل = ق نق هـ

الشغل = ١٠ × ١,٥ × ١,٨ = ٢٧ جول

تمارين (٣)

(١) أوجد الشغل المبذول لتحريك جسم تحت تأثير قوة أفقية مقدارها ٢٠ ث كجم على جسم موضوع على مستوى أفقى أملس فحركته مسافة ١٠٠ سم .

(٢) أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك جسم تحت تأثير قوة أفقية مقدارها ١٥ ث كجم على جسم موضوع على مستوى أفقى خشن فحركته مسافة ٣ متر ، فإذا كانت المقاومة الناتجة عن الحركة مقدارها ١٥٠٠ ث جم .

(٣) أوجد الشغل المبذول بالجول لتحريك جسم على مستوى أفقى أملس بتأثير قوة مقدارها ٥٠ ث كجم ، إذا تحرك الجسم مسافة ٧ أمتار و كانت القوة تميل على المستوى الأفقى بزاوية مقدارها ٣٠ ° .

(٤) أوجد الشغل المبذول لتحريك جسم موضوع على مستوى أفقى خشن تحت تأثير قوة مقدارها ٥٠ نيوتن و تميل على الأفقى بزاوية ٦٠° ، إذا تحرك الجسم مسافة ٨ مترا ، و كذلك أحسب الشغل المفقود علما بأن مقاومة المستوى لحركة الجسم ٢ ث كجم .

(٥) أوجد الشغل المبذول عندما يتحرك جسم كتلته ١٥ كجم موضوعا على مستوى مائل أملس ، يميل على المستوى الأفقى بزاوية قدرها ٤٥˚ عندما ينزلق ٩ أمتار .

(٦) يتحرك جسم وزنه ٣٠ ث كجم لأسفل على مستوى خشن مائل على الأفقى بزاوية ٦٠˚ ، فإذا تحرك الجسم بتأثير وزنه ٢٠ متراً ، فأوجد قيمة الشغل المبذول ، علما بأن الإحتكاك بين الجسم و المستوى ٤ ث كجم ، احسب الشغل المبذول وكذلك الشغل المفقود نتيجة الأحتكاك بين المستوى و الجسم .

(٧) جسم كتلته ١٠ كجم ، سقط من أرتفاع ١٢ متراً عن سطح الأرض ، احسب الشغل المبذول حتى يصل الجسم إلى سطح الأرض .

(٨) ما هو الشغل المبذول لرفع جسم كتلته ٢٥٠ جم مسافة ٤ أمتار بتأثير قوة مقدارها ٥٠ نيوتن

(١٠) زنبرك ثابت صلابته ٢٠ نيوتن / متر علقت عليه كتله فأزيح عن موضع اتزانه مسافة ٥ سم ، احسب الشغل المبذول على الزنبرك .

(١١) زنبرك ثابت علقت عليه كتله ٢ كجم فأزيح عن موضع اتزانه مسافة ٠,١ متر ، احسب الشغل المبذول على الزنبرك .

الوحدة الرابعة

الطـــاقة

مقدمة :

الشغل والطاقة مصطلحان متداخلان , فالشّغل الميكانيكي هو أحد أشكال أنتقال الطاقة ، فالطاقة تُنتج شغلاً كما أنها تنشأ عن الشغل .

وتتحول الطاقة من صورة لأخرى ويبقى أن الطاقة لا تفنى ولا تستحدث من العدم .

٤- الطاقة (Energy)

٤-١ تعريف الطاقة

الطاقة هى المقدرة على عمل شغل .

٤-٢ طاقة الحركة (Kinetic Energy)

٤-٢-١ حساب طاقة الحركة

الشغل الذى يمكن للجسم أن يبذله بسبب حركته ضد القوى المقاومة له حتى يسكن.

إذا كانت القوة " ق " تؤثر على جسم كتلته "ك" فيتحرك فى اتجاه الإزاحة مسافة " ف " بسرعة ابتدائية " $ع_٠$ " وسرعه نهائية " $ع_١$ " بعجلة " جـ " فإنه يمكن حساب طاقة الحركة " $ط_ع$ " كالتالى

$$ط_ع = ك \int_{ع_٠}^{ع_١} جـ \; ءف$$

$$ط_ع = ك \int_{ع_٠}^{ع_١} \frac{ءع}{ءن} \; ءف$$

$$ط_ع = ك \int_{ع_٠}^{ع_١} \frac{ءف}{ءن} \; ءع$$

$$ط_ع = ك \int_{ع_٠}^{ع_١} ع \; ءع$$

$$ط_{ح} = \frac{١}{٢} ك ع^{٢} \Big|_{ع_{.}}^{ع_{١}} = \frac{١}{٢} ك \left(ع_{١}^{٢} - ع_{.}^{٢}\right)$$

$$ط_{ح} = \frac{١}{٢} ك \left(ع_{١}^{٢} - ع_{.}^{٢}\right)$$

عندما يبدأ الجسم الحركة من السكون فإن سرعته الأبتدائيه تساوى "صفر" وسرعته النهائيه "ع" وتكون طاقة حركته

$$ط_{ح} = \frac{١}{٢} ك ع^{٢}$$

<u>٤-٢-٢ وحدات قياس طاقة الحركة</u>

وحدة الطاقة = وحدة الشغل = وحدة قوة × وحدة مسافة

(أ) وحدات علمية (مطلقة)

إرج (داين . سم) ، جول (نيوتن . متر)

(ب) وحدات عملية (تثاقليه)

ث جم . سم ، ث كجم . متر ، ث طن . كم

الكميه	الكتله	السرعة	طاقة الحركة
الرمز	ك	ع	ط ح
الوحدة	كجم	متر / ث	جول
	جم	سم / ث	أرج

٤-٢-٣ معادلة أبعاد طاقة الحركة

$\because [ك] = ك$

$\because [ع^{٢}] = (ل ز^{-١})^{٢} = ل^{٢} ز^{-٢}$

$\therefore [ط_{ع}] = ك ل^{٢} ز^{-٢}$ **ويتضح من معادلة الأبعاد أن طاقة الحركة هى شغل .**

مثال (1)

تتحرك سيارة كتلتها ٥٠٠٠ كجم بسرعة ١٠ م / ث . أوجد طاقة حركة السيارة

الحـل

ك = ٥٠٠٠ كجم ، ع = ١٠ م/ث

$$\text{طاقة الحركة} = \frac{١}{٢} ك ع^{٢}$$

$$= \frac{١}{٢} \times ٥٠٠٠ \times (١٠)^{٢} = ٢٥٠٠٠٠ \text{ جول}$$

٤-٣ طاقة الوضع

٤-٣-١ تعريف طاقة الوضع

هي الطاقة المختزنة في الاجسام نتيجة لموضعها.

وسنقوم بدراسة طاقة الوضع فى حالتين عندما تكون القوى المحافظه عباره عن قوة وزن أو قوة أرجاع للياى.

٤-٣-٢ تعريف طاقة الوضع فى حالة الوزن

هى الشغل الذى تبذله قوة الوزن فى اتجاه الإزاحة من موضع الجسم إلى أن يصل إلى سطح الأرض .

لرفع جسم لأعلى عكس الجاذبية الأرضية نؤثر عليه بالقوة ن التى تبذل شغل يخزن فى الجسم على شكل طاقة وضع . مع الأخذ فى الأعتبار أن القوة المحافظة تساوى فى المقدار وتعاكس فى الإتجاه القوة التى سببت الشغل.

$$ء ط_{و} = - ن \cdot ء ف$$

بتكامل الطرفين حيث أن الجسم يقذف من أرتفاع ($ف_{١}$) أعلى سطح الأرض حتى يصل للأرتفاع $ف_{٢}$

$$ط_{و} = - \int_{ف_{١}}^{ف_{٢}} (-كء)\ ءف = كء \int_{ف_{١}}^{ف_{٢}} ءف$$

$$ط_{و} = كء ف \Big|_{ف_{١}}^{ف_{٢}} = كء(ف_{٢} - ف_{١})$$

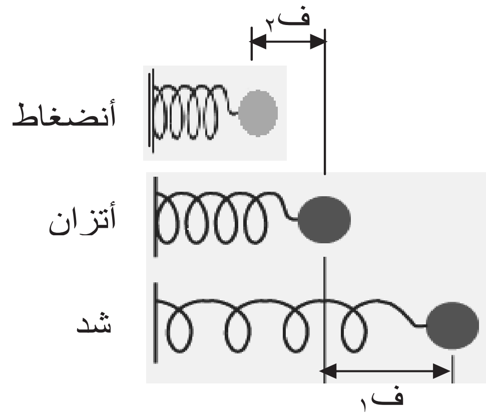
عند قذف الجسم من سطح الأرض فإن

$$ط_{و} = كء ف \Big|_{٠}^{ف} = كء ف$$

$$ط_{و} = كء ف$$

٤-٣-٣ تعريف طاقة الوضع فى حالة قوة أرجاع الياى

هى طاقة كامنة ناتجة عن قوة المرونة لزنبرك التى تخزن فى الزنبرك وتتحول لطاقة حركة .



عند شد ياى مبتعداً عن نقطة أتزانه فإن قوة الشد "ں = ث ف" تبذل شغل يخزن فى الياى على شكل طاقة وضع.

ويمكن حساب طاقة الوضع كالتالى

$$\text{ط}_{\text{وي}} = -\int_{\text{ف}_١}^{\text{ف}_٢} (-\text{ث ف})\, \text{ء ف} = \text{ث} \int_{\text{ف}_١}^{\text{ف}_٢} \text{ف ء ف}$$

$$\text{ط}_{\text{وي}} = \frac{١}{٢}\text{ث ف}^{٢} \Big|_{\text{ف}_١}^{\text{ف}_٢} = \frac{١}{٢}\text{ث}\left(\text{ف}_٢^{٢} - \text{ف}_١^{٢}\right)$$

وعند شد الياى عند وضع الأتزان فإن $\text{ف}_١$ = صفر

$$\text{ط}_{\text{وي}} = \frac{١}{٢}\text{ث ف}^{٢} \Big|_{٠}^{\text{ف}} = \frac{١}{٢}\text{ث ف}^{٢}$$

٤-٣-٤ وحدات قياس طاقة الوضع

هى نفس وحدات قياس طاقة الحركة

الكميه	الكتله	عجلة الجاذبيه	المسافه	طاقة الوضع
الرمز	ك	ء	ف	$\text{ط}_{\text{و}}$
الوحدة	كجم	٩,٨ م / $\text{ث}^{٢}$	متر	جول
	جم	٩٨٠ سم / $\text{ث}^{٢}$	سم	أرج

الكميه	ثابت المرونه	الأستطالة	طاقة الوضع
الرمز	ث	ف	$\text{ط}_{\text{و}}$
الوحدة	نيوتن / متر	متر	جول
	داين / سم	سم	أرج

٤-٣-٥ معادلة أبعاد طاقة الوضع

$$\because\ [\text{ك}] = \text{ك}$$

$$\because\ [\text{ء}] = \text{ل}\,\text{ز}^{-٢}$$

$$\because\ \text{ف} = \text{ل}$$

وتُحسب معادلة الأبعاد من العلاقة

$$\therefore\ [\text{ط}_{\text{و}}] = \text{ك}\,\text{ل}\,\text{ز}^{-٢} \times \text{ل}$$

$\therefore\ [\text{ط}_{\text{و}}] = \text{ك}\,\text{ل}^{٢}\,\text{ز}^{-٢}$ **ويتضح من معادلة الأبعاد أن طاقة الوضع فى الأصل شغل.**

مثال (2)

يعلق جسم كتلته ٥ كجم بنهاية زنبرك طوله الطبيعى ١٥ سم فيصير طوله ١٧ سم عندما يتزن الجسم .

(أ) أوجد ثابت مرونة الزنبرك .

(ب) أوجد طاقة وضع الجسم إذا أبعدناه ٥ سم عن وضع أتزانه .

الحـل

$$\text{ث} = \frac{\text{ك}\,\text{ء}}{\text{ف}} = \frac{٥ \times ٩{,}٨}{٠{,}٠٢} = ٢٤٥٠ \text{ نيوتن / م}$$

طاقة الوضع = $\frac{١}{٢}$ ث ف ^{٢}

طاقة الوضع = $\frac{١}{٢} \times$ ٢٤٥٠ $\times$ (٠,٠٥) ^{٢} = ٣ جول

مثال (3)

سقط جسم كتلته ٠,١ كجم من أرتفاع ٢,٥ متر عن سطح الأرض . أوجد طاقة وضعه بالجول

الحــل

ك = ٠,١ كجم ، ف = ٢,٥ متر

طاقة الوضع = ك د ف

= ٠,١ × ٩,٨ × ٢,٥ = ٢,٤٥ جول

٤-٤ الطاقة الميكانيكيه

من أكثر أشكال الطاقة ظهورا واستخداماً في حياتنا، وهي الطاقة المسؤولة عن كل أنواع الحركة التي نراها

الطاقة الميكانيكيه لجسم = طاقة الوضع + طاقة الحركة

٤-٥ مبدأ حفظ الطاقة

الطاقة لا تفنى و لا تستحدث من العدم إنما تتحول من شكل لآخر.

عند قذف جسم لأعلى عكس الجاذبية الأرضية فإننا نؤثر عليه بالقوة $\overleftarrow{ق}$ ليتحرك إزاحه $\overleftarrow{ءف}$.
وهذه القوة تبذل شغل يخزن فى الجسم على شكل طاقة وضع على صورة الضرب القياسى

ءط$_{و}$ = $-\overleftarrow{ق}$. $\overleftarrow{ءف}$

بأشتقاق الطرفين بالنسبة للزمن

$$\frac{ءط_و}{ءن} = -\vec{ق} \cdot \frac{ء\vec{ف}}{ءن}$$

$$\frac{ءط_و}{ءن} = -ك \frac{ء\vec{ع}}{ءن} \cdot \frac{ء\vec{ف}}{ءن}$$

$$\frac{ءط_و}{ءن} = -ك \frac{ء\vec{ع}}{ءن} \cdot \vec{ع}$$

$$\frac{ءط_و}{ءن} = -\frac{ء}{ءن}\left(\frac{١}{٢} ك ع^٢\right)$$

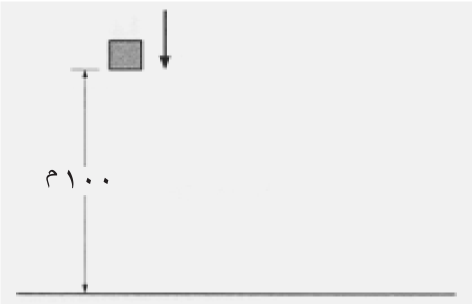
$$\frac{ءط_و}{ءن} = -\frac{ءط_ح}{ءن}$$

$$\frac{ء}{ءن}\left(ط_و + ط_ح\right) = ٠$$

$ط_و + ط_ح =$ مقدار ثابت

مثال (4)

سقط جسم كتلته ٦ كجم من ارتفاع ١٠٠ متر عن سطح الأرض . أوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع عند أى لحظة أثناء سقوطة . ثم أوجد السرعة التى يصل بها لسطح الأرض .



الحـل

- عند أقصى أرتفاع

طاقة الحركة = صفر

طاقة الوضع = ك د ف

= ٦ × ٩,٨ × ١٠ = ٥٨٨ جول

طاقة الحركة + طاقة الوضع = ٥٨٨

- عند سطح الأرض

طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ ك ع ^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ع ^{٢} = ٣ ع ^{٢}

طاقة الوضع = صفر

∵ طاقة الحركة + طاقة الوضع = مقدار ثابت

٣ ع ^{٢} = ٥٨٨

ع ^{٢} = ١٩٦

بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

ع = ١٤ م / ث

مثال (5)

زنبرك ثابت صلابته ١٠٠ نيوتن / متر علقت عليه كتله قدرها ٤ كجم إذا أزيح عن موضع أتزانه مسافة ٢ متر احسب سرعته عندما يعود لموضع الاتزان .

الحـل

- عندما يستطيل الزنبرك فإن

طاقة حركته = ٠

طاقة وضعه = $\frac{١}{٢}$ ث ف ^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ١٠٠ × (٢) ^{٢} = ٢٠٠ جول

- عند نقطة الإتزان

طاقة الحركة = $\frac{١}{٢}$ ك ع ^{٢} = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ع ^{٢} = ٢ ع ^{٢}

طاقة الوضع = صفر

∵ طاقة الحركة + طاقة الوضع = مقدار ثابت

٢ ع ^{٢} = ٢٠٠

ع ^{٢} = ١٠٠ ، بأخذ الجذر التربيعى للطرفين

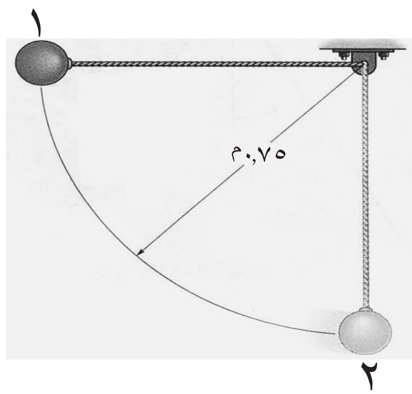
ع = ١٠ م / ث

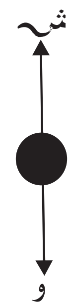
مثال (6)

بندول بسيط كتلته ٠,٢ كجم ساكن أفقياً ، أوجد: (١) سرعته. (٢) الشد فى وتره.

عند مرور الكتلته بأدنى أرتفاع عند سطح الأرض ، علماً بأن عجلة الجاذبية الأرضية

٩,٨ م/ث^{٢} .





الحل

(١)

- عند أقصى أرتفاع

$\text{ط}_{\text{ع١}} = ٠$

$\text{ط}_{\text{و١}} = \text{ك ء ف} = ٠,٢ \times ٩,٨ \times ٠,٧٥ = ١,٤٧$ نيوتن . متر

- عند أدنى أرتفاع

$\text{ط}_{\text{ع٢}} = \frac{١}{٢}\ \text{ك ع}^{٢} = \frac{١}{٢}(٠,٢)\ \text{ع}^{٢} = ٠,١\ \text{ع}^{٢}$

$\text{ط}_{\text{و٢}} = ٠$

$\text{ط}_{\text{ع١}} + \text{ط}_{\text{و١}} = \text{ط}_{\text{ع٢}} + \text{ط}_{\text{و٢}}$

$٠,١\ \text{ع}^{٢} = ١,٤٧$

$$ع = \sqrt{\frac{١,٤٧}{٠,١}} = ٣,٨ \text{ م/ث}$$

(٢)

$$ش - و = ك\,جـ$$

$$ش - و = ك \left(\frac{ع^{٢}}{نق} \right)$$

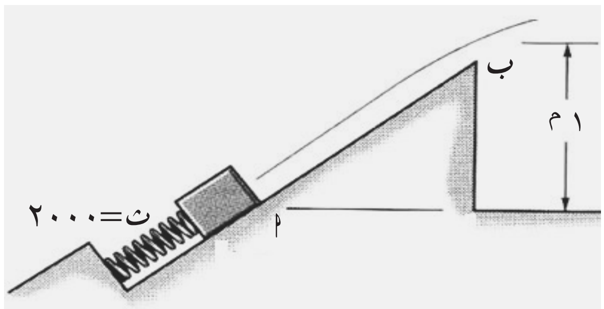
$$ش = ك \left(\frac{ع^{٢}}{نق} \right) + و$$

$$ش = ٠,٢ \times \left(\frac{(٣,٨)^{٢}}{٠,٧٥} \right) + ٠,٢ \times ٩,٨$$

ش = ٥,٨٩ نيوتن

مثال (7)

جسم يضغط ياى بقوه ٤٩ نيوتن ناتجه عن وزنه مسافة ٠,٥ متر فيصبح عند الموضع "أ" عندما يحرر الياى يتحرك الجسم على المستوى الأملس ، أوجد سرعة الجسم عندما يكون على أرتفاع ٠,٩ متر ، حيث معامل الصلابة للياى ٢٠٠٠ نيوتن / متر



الحل

مجموع طاقتى الوضع و الحركة عند أ = مجموع طاقتى الوضع والحركة عند " ب"

$$(\text{ط}_{\text{ع}} + \text{ط}_{\text{وي}})_{\text{م}} = (\text{ط}_{\text{ع}} + \text{ط}_{\text{و}})_{\text{ب}}$$

$$٠ + \frac{١}{٢}\,\text{ث ف}^{٢} = \frac{١}{٢}\,\text{ك ع}^{٢} + \text{و ف}$$

$$٠ + \frac{١}{٢} \times ٢٠٠٠ \times (٠,٥)^{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{٤٩}{٩,٨} \times \text{ع}_{\text{ب}}^{٢} + ٤٩ \times ١$$

$$٢٥٠ = ٢,٥\,\text{ع}_{\text{ب}}^{٢} + ٤٩$$

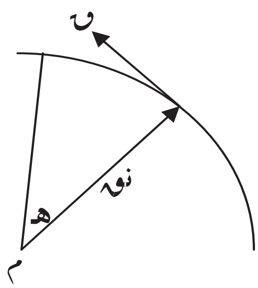
$$٢,٥\,\text{ع}_{\text{ب}}^{٢} = ٢٠١$$

$$\text{ع}_{\text{ب}}^{٢} = \frac{٢٠١}{٢,٥} = ٢٠٠,٤$$

$$\text{ع}_{\text{ب}} = \sqrt{٢٠٠,٤} = ١٤,١٥٦ \ \text{م/ث}$$

٤-٦ طاقة الحركة الدورانية

إذا كان لدينا جسم كتلته ك يتحرك فى مسار دائرى نصف قطره نق تحت تأثير قوة ق حول محور مار بالمركز م . شغل هذه القوة عندما يدور الجسم زاوية هـ قاطعاً خلال ذلك مسافة ف على مساره الدائرى



$$\text{ط}_{\text{حد}} = \frac{1}{2}\,\text{ك}\,\text{ع}^{2}$$

$$\text{ط}_{\text{حد}} = \frac{1}{2}\,\text{ك}\left(\text{ع}_{\text{ز}}\,\text{نق}\right)^{2}$$

$$\text{ط}_{\text{حد}} = \frac{1}{2}\left(\text{ك}\,\text{نق}^{2}\right)\text{ع}_{\text{ز}}^{2}$$

$$\text{ط}_{\text{حد}} = \frac{1}{2}\,\text{ع}_{\text{ص}}\,\text{ع}_{\text{ز}}^{2}$$

عندما يتحرك جسم حركه مركبه من حركتين انتقاليه ودورانيه معاً مثل حركة السباح الدورانيه حول نفسه وهو يتحرك حركه انتقاليه نحو حمام السباحه فإن طاقة الحركة الكليه لجسم هى مجموع طاقتى الحركة الأنتقاليه والدورانيه.

$$\text{ط}_{\text{حد}} = \frac{1}{2}\,\text{ك}\,\text{ع}^{2} + \frac{1}{2}\,\text{ع}_{\text{ص}}\,\text{ع}_{\text{ز}}^{2}$$

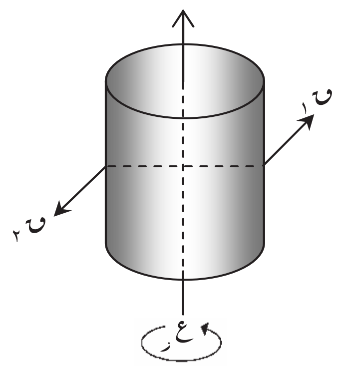
مثال (8)

أسطوانة دائرية قائمه تتحرك من السكون حركه دائريه بعجله زاويه ١٨ زاوية نصف قطرية/ث^{٢} وعزم القصور الذاتى حول محور الدوران ٠,٢ كجم . م^{٢} ، احسب

(١) السرعة الزاوية بعد ثانيتين من الحركة .

(٢) الطاقة الحركية لأسطوانة بعد ثانيتين من بدء حركتها من السكون.

الحــل



$\because$ $ع_ر = ع_{ر.} + جـ_ر ن$

$\therefore$ $ع_ر = ٠ + ١٨ \times ٢ = ٣٦$ زاوية نصف قطرية / ث

طاقة الحركة $= \frac{١}{٢} ع_ص ع_ر^{٢}$

طاقة الحركة $= \frac{١}{٢} \times ٠,٢ \times (٣٦)^{٢} = ١٢٩,٦$ جول

٤-٧ مقارنه بين الكميات الميكانيكيه فى الحركه الخطيه والحركه الدورانيه

	الحركه الأنتقاليه	الحركه الدورانيه
١	الإزاحه: ف	الأزاحه الزاويه: الزاويه **هـ**
٢	السرعه الخطيه: $\text{ع} = \frac{\text{ءف}}{\text{ءن}}$	السرعه الزاويه: $\text{ع}_{\text{ز}} = \frac{\text{ءهـ}}{\text{ءن}}$
٣	العجله الخطيه: $\text{جـ} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ء}^{٢}\text{ف}}{\text{ءن}^{٢}}$	العجله الزاويه: $\text{جـ}_{\text{ز}} = \frac{\text{ءع}_{\text{ز}}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ء}^{٢}\text{هـ}}{\text{ءن}^{٢}}$
٤	الكتله: **ك**	عزم القصور: $\text{ع}_{\text{ص}} = \text{ك نق}^{٢}$
٥	كمية الحركه الخطيه = **ك** ع	كميه الحركه الزاويه = $\text{ع}_{\text{ص}}\ \text{ع}_{\text{ز}}$
٦	القوة= **ك جـ**	العزم "م" = $\text{ع}_{\text{ص}}\ \text{جـ}_{\text{ز}}$
٧	الشغل = **ق ف**	الشغل = $\text{ع}_{\text{ص}}\ \text{ع}_{\text{م}}$
٨	طاقة الحركه الخطيه = $\frac{١}{٢}\ \text{ك ع}^{٢}$	طاقة الحركه الدائريه = $\frac{١}{٢}\ \text{ع}_{\text{ص}}\ \text{ع}_{\text{ز}}^{٢}$

تمارين (٤)

(١) تتحرك سيارة كتلتها ٦٠٠٠ كجم بسرعة ١٢ م / ث . أوجد طاقة حركة السيارة.

(٢) زنبرك ثابت صلابته ١٢٠ نيوتن / متر علقت عليه كتله قدرها ٥ كجم إذا أزيح عن موضع أتزانه مسافة ١,٥ متر احسب سرعته عندما يعود لموضع الاتزان .

(٣) يعلق جسم كتلته ٨ كجم بنهاية زنبرك طوله الطبيعى ٢٠ سم فيصير طوله ٢٤ سم عندما يتزن الجسم . (أ) أوجد ثابت مرونة الزنبرك .

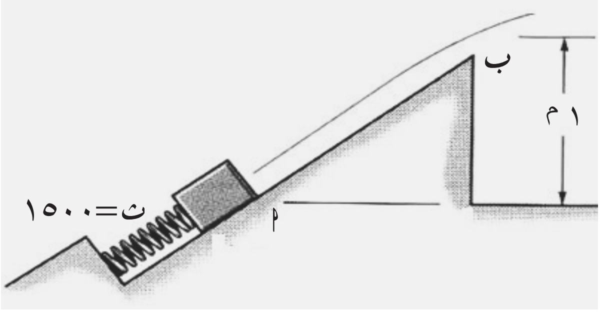
(ب) أوجد طاقة وضع الجسم إذا أبعدناه ٦ سم عن وضع أتزانه .

(٤) سقط جسم كتلته ٠,٢ كجم من أرتفاع ١,٥ متر عن سطح الأرض . أوجد طاقة وضعه بالجول

(٤) سقط جسم كتلته ٥ كجم من ارتفاع ١١٠ متر عن سطح الأرض . أوجد مجموع طاقتى الحركة والوضع عند أى لحظة أثناء سقوطة . ثم أوجد السرعة التى يصل بها لسطح الأرض .

(٥) بندول بسيط كتلته ٠,٢ كجم وطول ذراعه ١متر ساكن أفقياً ، أوجد سرعته والشد فى وتره عند مرور كتلته بأدنى موضع .

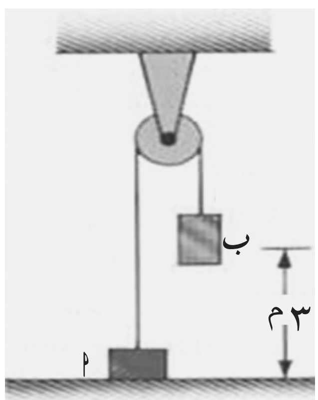
(٦) جسم يضغط ياى بقوه ٦٠ نيوتن ناتجه عن وزنه مسافة ٠,٦ متر فيصبح عند الموضع "أ" عندما يحرر الياى يتحرك الجسم على المستوى الأملس ، أوجد سرعة الجسم عندما يكون على أرتفاع ١ متر ، حيث معامل الصلابة للياى ١٥٠٠ نيوتن / متر



(٧) مقلاع مشدود فتحته الأمامية ٠,٢ متر وأرتفاع مطاطه ٠,٤ متر ومعامل الصلابه لمطاطه ٣٠ نيوتن/م يحتوى على قذيفه كتلتها ٠,١ كجم وكل من طرفى المطاط تم شده مسافة ٠,٣ متر احسب السرعة التى يخرج بها قذيفه من المقلاع .

(٨) جسم وزنه ٤٠٠ نيوتن يضغط ياى مسافة ٠,٤ متر فيصبح على أرتفاع ٠,٤ متر عن سطح الأرض وعندما يتحرر الياى يتحرك الجسم لأعلى ، أوجد سرعة الجسم عندما يكون على أرتفاع ١,٥ متر ،حيث معامل الصلابة للياى ٦٠٠٠ نيوتن / متر

(٩) الكتلتان أ ، ب متصلتان بخيط خفيف ويمر على بكرة ملساء عديمة الأحتكاك ، الكتلة "ب" ١٠ كجم تبدأ الحركة من السكون باستخدام قانون حفظ الطاقة ، أوجد سرعة الكتلة "أ" ٤ كجم عندما تسقط الكتلة ١٠ كجم من أرتفاع ٣ متر وتصل لسطح الأرض.



(١٠) أسطوانة دائرية قائمة كتلتها ٢٠ كجم و نصف قطرها ٠,٣ متر تتحرك من السكون تحت تأثير القوتين ٨ ، ١٢ نيوتن ، احسب

(٢) عزم القوى بالنسبة لمحور الدوران

(٢) عزم القصور الذاتى للأسطوانة حول محور الدوران .

(٣) العجلة الزاوية للدوران .

(٤) السرعة الزاوية بعد ثانيتين من الحركة .

(٥) الطاقة الحركية لأسطوانة بعد ثانيتين من بدء حركتها من السكون.